

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería de tecnologías industriales

Estudio de la implementación de un mass damper en una motocicleta eléctrica de competición

Autor: F. Fernando Sánchez Rodríguez

Tutor: Daniel García Vallejo

Dpto. Ingeniería mecánica y fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2021



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de
Tecnologías Industriales

Estudio de la implementación de un mass damper en una motocicleta eléctrica de competición

Autor:

F. Fernando Sánchez Rodríguez

Tutor:

Daniel García Vallejo

Profesor titular

Dpto. Ingeniería mecánica y fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2021

Trabajo Fin de Grado: Estudio de la implementación de un mass damper en una motocicleta eléctrica de competición

Autor: F. Fernando Sánchez Rodríguez

Tutor: Daniel García Vallejo

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

Agradecimientos

A mis compañeros de carrera, por el apoyo mutuo durante este bonito camino. A mi familia por su apoyo y paciencia. A mis amigos por hacer de este tiempo una gran etapa. A todos quienes han hecho mi vida un poco más feliz.

Resumen

En este proyecto se pretende demostrar la capacidad de un mass damper o absorbedor pasivo de vibraciones de reducir las amplitudes de las vibraciones que sufre una motocicleta eléctrica real de competición, principalmente producidas por irregularidades del terreno. Para ello se realiza un estudio dinámico de este sistema mecánico que componen la moto y el absorbedor y, a partir de las conclusiones obtenidas de un modelo linealizado, se demostrará que, numéricamente, es posible atenuar estas vibraciones mediante la adición de una masa resonante.

Abstract

In this project, it is pretended to demonstrate the capability of a mass damper or passive vibration absorber to reduce the amplitudes of vibrations suffered by a real competition electric motorbike, mainly produced by road's irregularities. In order to prove it, a dynamic study of this mechanical system composed by the motorbike and the absorber is carried out and, based on the conclusions obtained from a linearized model, it will be achieved that, numerically, it is possible to attenuate the vibrations by adding a resonant mass to the model.

Contenido

Agradecimientos.....	7
Resumen.....	9
Abstract.....	11
Índice.....	13
Notación.....	15
Capítulo 1.-Introducción.....	18
1.1.- Objetivos del proyecto.....	20
Capítulo 2.- Descripción del modelo mecánico.....	22
2.1.- Esquema del modelo. Grados de libertad y parámetros del sistema.....	22
2.2.- Ecuaciones de movimiento.....	25
2.3.- Frecuencias naturales y modos de vibración del sistema.....	27
2.4.- Linealización en torno a la posición de equilibrio.....	28
Capítulo 3.- Mass damper.....	31
3.1.- Preliminares.....	31
3.2.- Aplicación a un sistema de un grado de libertad.....	33
3.3.- Efecto de la frecuencia del absorbedor.....	36
3.4.- Efecto de la masa del absorbedor.....	37
3.5.- Conclusiones.....	37
3.6.- Comparación de resultados tras la implementación del mass damper.....	38
Capítulo 4.- Implementación del mass damper en el sistema.....	39
4.1.- Nuevas ecuaciones de movimiento.....	39
4.2.- Cálculo de la posición de equilibrio y linealización del sistema.....	41
Capítulo 5.- Escenarios de simulación.....	42
5.1.- Curva del par motor empleada.....	43
5.2.- Irregularidades del terreno.....	46
Capítulo 6.- Análisis del efecto del absorbedor.....	50
6.1.- Efecto de la frecuencia.....	50
6.2.- Efecto de la masa.....	51
6.3.- Conclusiones.....	53
Capítulo 7.- Resultados de las simulaciones.....	54
7.1.- Excitaciones senoidales en régimen permanente.....	56
7.2.- Respuesta ante excitaciones en rampa en régimen permanente.....	64

7.3.- Influencia del posicionamiento del absorbedor	68
Capítulo 8.- Conclusiones	72
Anexo	73
.....	74
Índice de figuras	75
Índice de tablas	78
Bibliografía	79

Notación

m_2	Masa del sólido 2
m_3	Masa del sólido 3, basculante
m_4	Masa del sólido 4, horquilla delantera
m_5	Masa del sólido 5, rueda trasera
m_6	Masa del sólido 6, rueda delantera
m_c	Masa del chasis y elementos solidarios
I_2	Inercia del sólido 2
I_c	Inercia de cabeceo del chasis y elementos solidarios
I_3	Inercia del basculante
I_4	Inercia de la horquilla delantera
I_5	Inercia de la rueda trasera
I_6	Inercia de la rueda delantera
k_5	Rigidez del neumático trasero
k_6	Rigidez del neumático delantero
k_{32}	Rigidez de la suspensión trasera
k_{42}	Rigidez de la suspensión delantera
c_5	Coefficiente de amortiguamiento del neumático trasero
c_6	Coefficiente de amortiguamiento del neumático delantero
c_{32}	Coefficiente de amortiguamiento de la suspensión trasera
c_{42}	Coefficiente de amortiguamiento de la suspensión delantera
r_i	Posición relativa del punto o sólido i
\dot{r}_i	Velocidad del punto o sólido i
\ddot{r}_i	Aceleración del punto o sólido i
T	Energía cinética
V	Energía potencial
L	Lagrangiano ($L=T-V$)
F_R	Función de disipación de Rayleigh
Q	Fuerza generalizada

$\frac{\partial r}{\partial q}$	Jacobiano de r respecto al vector q
q_{eq}	Posición de equilibrio
ω_n	Frecuencia natural
ω_{excit}	Frecuencia de excitación
ω_{md}	Frecuencia natural del mass damper
φ	Autovector o modo de vibración
β	Relación entre masas
δ	Relación entre frecuencias
x_2	Posición horizontal del centro de gravedad del chasis
z_2	Posición vertical del centro de gravedad del chasis
θ_2	Ángulo de cabeceo del chasis
θ_{32}	Ángulo relativo entre chasis y basculante
S_{42}	Elongación de la suspensión delantera
Sin	Seno
Cos	Coseno
t	Tiempo
F	Amplitud de una fuerza
TMD	Tuned Mass Damper (Absorbedor sintonizado)
d	Distancia entre ejes de las ruedas
ρ_{aire}	Densidad del aire
C_d	Coefficiente aerodinámico
A_f	Área frontal proyectada
μ	Coefficiente de rozamiento
g	Fuerza gravitatoria
$H(\omega)$	Función de respuesta en frecuencia

Capítulo 1.-Introducción

En la actualidad, la carrera de ingeniería se caracteriza por su versatilidad para resolver todo tipo de problemas técnicos, desde la mínima necesidad de la vida cotidiana hasta las situaciones más límites de la humanidad, cuyos retos han llevado al hombre a lanzar sondas a otros planetas o incluso más allá del sistema solar. En la evolución histórica del ser humano, se han ido desarrollando distintas tecnologías que le permitían ir cada vez más allá y mejorar su calidad de vida. Algunos de estos desarrollos se ven reflejados en tecnologías que, a día de hoy, se ven como imprescindibles y que han tenido su larga evolución, como las viviendas, desde las antiguas casas de adobe hasta los enormes rascacielos de hoy en día, o desde los primeros carros tirados por caballos hasta los potentes vehículos de motor que hoy en día son tan necesarios.

Es en este contexto de incesante evolución y ambición por proyectos cada vez más complejos es donde comienza a cobrar una gran importancia el fenómeno físico de las vibraciones y la necesidad de atenuarlas. Es ésta última necesidad la que da sentido al presente proyecto, pues, tomando como referencia los conocidos '*Mass dampers*' (En adelante absorbedores o Tuned Mass dampers), utilizados en los grandes rascacielos con el fin de atenuar los desplazamientos que sufre un edificio, originados por el movimiento de la base debido a un seísmo, se pretende estudiar su implementación en una motocicleta de competición.

El funcionamiento es relativamente sencillo de entender: Al producirse un movimiento en la base de un edificio, la vibración recorre la estructura produciendo un desplazamiento de todos sus puntos, con lo que la función del mass damper es producir un movimiento en sentido contrario de forma que se atenúe la vibración resultante, como se muestra gráficamente a continuación:

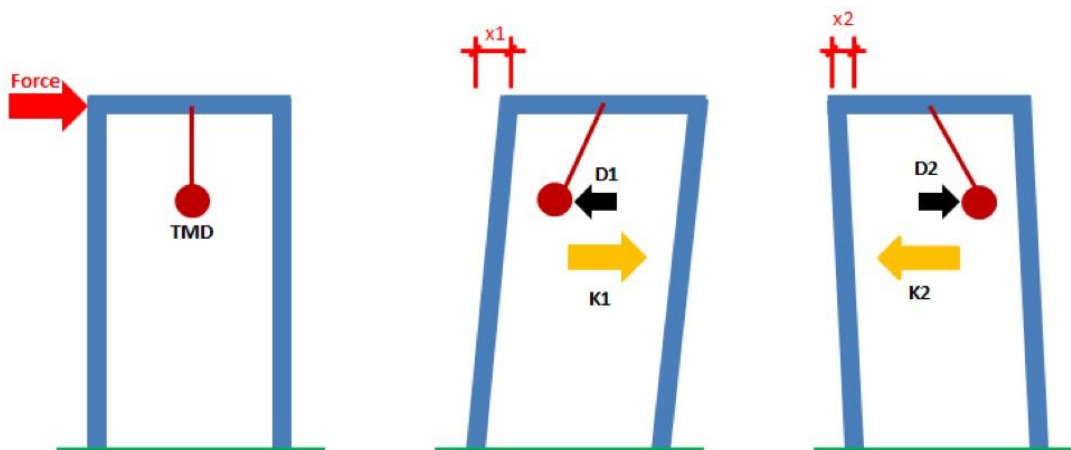


Figura1.1.- Esquema explicativo sobre el funcionamiento de un mass damper

La primera aplicación del *mass damper* a la automoción la trajo el equipo de Renault de Fórmula 1 ante la necesidad de cumplimentar el reglamento de 2005, en el cual se imponía la necesidad de rigidizar la suspensión delantera con el fin de mantener el alerón delantero lo más cerca posible del suelo para asegurar cierto rendimiento aerodinámico, pero esto, a su vez, generaba un efecto rebote sobre el coche que no resultaba ser positivo para su comportamiento dinámico. Fue de esta necesidad de contrarrestar los movimientos verticales del morro de donde nació la idea de posicionar una masa libre suspendida en la suspensión delantera que hacía de

mass damper, que resultó aportar una mayor estabilidad y la posibilidad de atacar los pianos sin perder tracción. Inicialmente, esta masa suspendida era de unos 10 kg, pero se podía cambiar según fueran las necesidades de cada circuito, lo cual ofrece una alta versatilidad para el mundo de la competición.

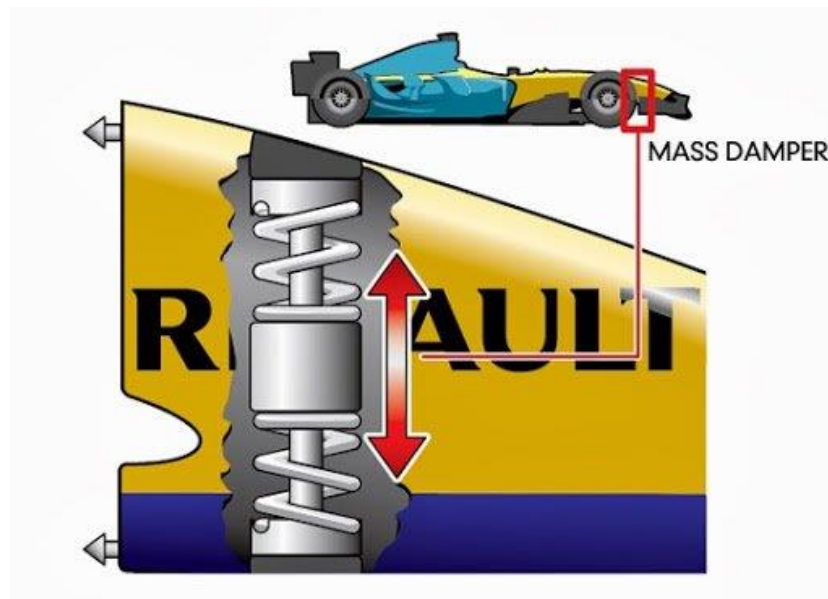


Figura 1.2.- Mass damper instalado por el equipo Reanult de F1 en 2005 y 2006

En el mundo de la competición del motociclismo, es habitual incorporar innovaciones técnicas empleadas en un primer momento por los monoplazas. Como caso más evidente, en los últimos años se han incorporado los famosos alerones en los carenados (también llamados “aletas”), cuyo efecto aerodinámico favorece el comportamiento de la moto en ciertos aspectos, como en la aceleración, pues se aprovecha el drag de la fuerza aerodinámica para asegurar una mayor tracción del neumático delantero y, por tanto, un mejor aprovechamiento de la potencia del prototipo.



Figura 1.3.- Imagen de las “aletas” implantadas por Ducati en el mundial de Moto GP

El caso del *mass damper* es uno de ellos. Tras varios años de desarrollo, finalmente también han llegado al mundial de Moto GP, donde el equipo que más aprovecha esta idea es el equipo Ducati de Moto GP, quienes han instalado un *inertor* en el colín^[1], además de haber

desarrollado esta tecnología. En la categoría de Moto 2 también se tiene constancia de la aplicación de este dispositivo, como se muestra a continuación:

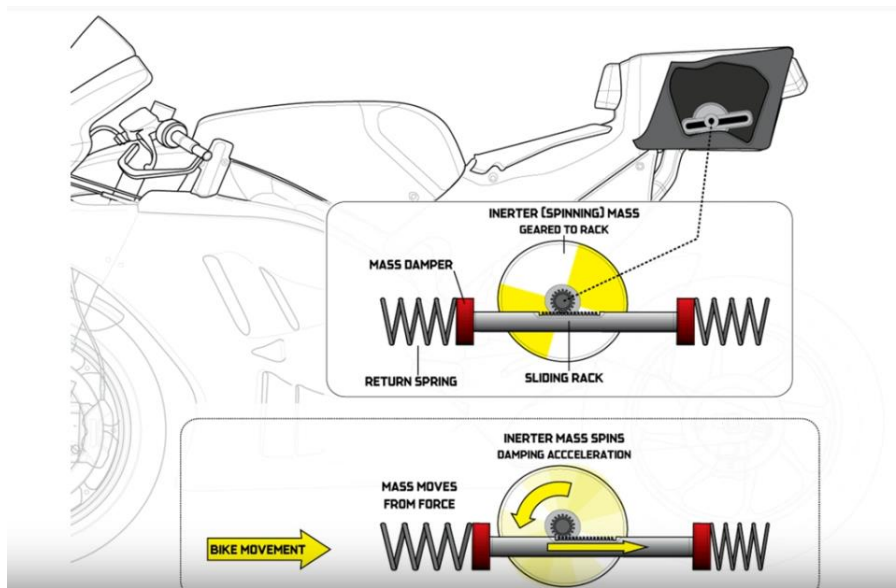


Figura 1.4.- Esquema del inerte desarrollado por Ducati para el mundial de Moto GP



Figura 1.5.- Mass damper implementado en la categoría Moto 2 del mundial

La implementación de este dispositivo en las motos tiene un efecto positivo, pues asegura una mejor tracción del neumático trasero, lo que favorece la seguridad evitando los *highsides* y un mejor comportamiento dinámico, pues de nuevo se aprovecha mejor la potencia.

1.1.- Objetivos del proyecto

En este proyecto se pretende resolver la dinámica de una motocicleta de competición equiparable a una Moto3 como las del mundial, bajo distintos escenarios de excitaciones externas y ver cómo responde ante ellas, y, posteriormente, resolver los mismos casos, pero con el *mass damper* implementado en el modelo, para ver cómo influye en la dinámica y poder sacar ciertas conclusiones, como la posición más favorable y cómo dimensionarlo.

Para llevar estas ideas a cabo, se propone un modelo bidimensional de cinco grados de libertad bajo ciertas simplificaciones, como se desarrollará en el siguiente capítulo, en el que se obtendrán las ecuaciones de movimiento del sistema original.

Posteriormente, en el capítulo 3, se demostrará el funcionamiento teórico del *mass damper*, también llamado *absorbedor pasivo de vibraciones*, en un caso básico que permita sacar ciertas conclusiones como la influencia de los parámetros necesarios para su dimensionamiento.

En el capítulo 4 se mostrará cómo se implementa el absorbedor en las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico.

En el capítulo 5 se presentan los escenarios de carga que servirán como fuente de comparación de los distintos modelos nombrados, de donde se obtendrán las pertinentes conclusiones, donde interesa ver cuál es el caso óptimo de los propuestos.

En el capítulo 6 se pretende analizar cómo afectan los parámetros del absorbedor a la dinámica de la motocicleta, para lo que se linealizará el sistema en torno a una posición de equilibrio, aprovechando este sistema lineal para sacar dichas conclusiones que, posteriormente, se comprobarán en el sistema original.

En el capítulo 7 se discutirán los resultados de las distintas simulaciones llevadas a cabo, de donde se obtendrán una serie de conclusiones que serán plasmadas en el capítulo 8.

En los Anexos podrá encontrarse un diagrama de flujo del script de Matlab utilizado para la resolución de las simulaciones.

Capítulo 2.- Descripción del modelo mecánico

Para el estudio de la dinámica del sistema, es importante dejar claro en una primera instancia que lo que se pretende analizar es la dinámica vertical del conjunto moto-piloto y ver cómo responde ante excitaciones como la propia carretera, bien sea por el asfalto o por los pianos de una pista. Por ello, lo que se pretenden minimizar son las amplitudes de las vibraciones de las suspensiones delantera y trasera, pues esto se traduce en un menor desgaste de neumático, mayor tracción y confort para el piloto, pues le llegarán menos vibraciones a los brazos, por ejemplo. Dicho esto, será suficiente con plantear un sistema de 5 sólidos, como se desarrolla en el siguiente punto. Los datos de la motocicleta contemplados en este proyecto son los correspondientes a la primera motocicleta eléctrica desarrollada por el equipo de competición universitario de la Universidad de Sevilla, US Racing, para la VI competición de Motostudent, que se expone a continuación:

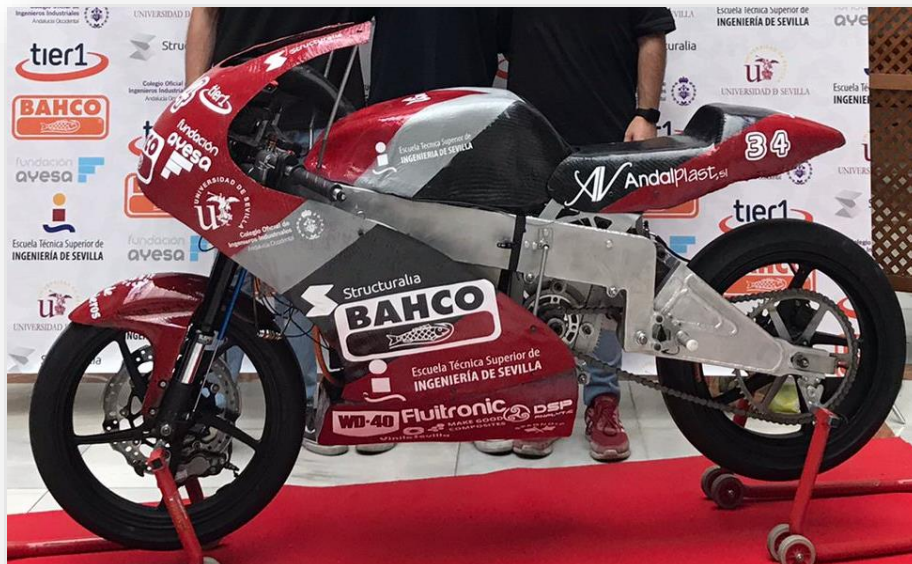


Figura 2.1.- Motocicleta eléctrica desarrollada por el equipo universitario US Racing

2.1.- Esquema del modelo. Grados de libertad y parámetros del sistema

Como se ha introducido, para el estudio de la dinámica vertical del prototipo basta con definir un sistema compuesto por 6 sólidos que se suponen rígidos^[2], que son: la rueda trasera, la rueda delantera, el basculante, el chasis y la horquilla delantera, donde el chasis a su vez se compone de los distintos componentes de la moto que son solidarios a él, como el motor o el subchasis, además de incorporar el piloto, pues se supondrá que éste no cambiará de posición.

En cuanto a los grados de libertad del sistema, interesaría definir entre ellos los movimientos verticales de ambas ruedas, pero esto genera ciertos problemas a la hora de definir el giro de la horquilla, por ejemplo. Por ello, se ha preferido establecer como grados de libertad las elongaciones de ambas suspensiones, así como los movimientos horizontal y vertical y el giro del chasis (Sólido 2), que se considerará el sólido principal. Así mismo, conviene añadir

que para los cálculos y simulaciones se impone en los neumáticos un contacto puntual con el suelo, que siempre será el punto que se obtiene al trazar un radio perpendicular al suelo desde el centro de cada rueda, además de imponer en ambos neumáticos una condición de rodadura sin deslizamiento, por simplificar, ya que lo que interesa es atenuar vibraciones, y no estudiar el aprovechamiento de la potencia transmitida o aprovechada por el prototipo.

A continuación, se muestra el esquema empleado para definir el modelo:

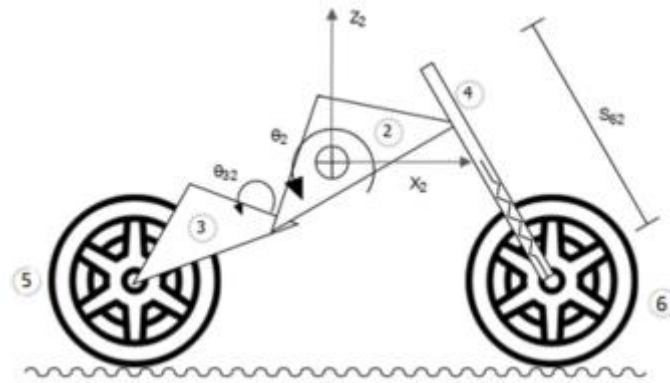


Figura 2.2.- Esquema del sistema, los sólidos y los grados de libertad definidos

Se define, por tanto, el vector de coordenadas generalizadas, \mathbf{q} , como:

$$\mathbf{q} = [X_2 \ Z_2 \ \theta_2 \ \theta_{32} \ S_{42}]^T$$

En cuanto a los parámetros empleados para este estudio, conviene aclarar que algunos de ellos son teóricos, como las masas e inercias de los elementos estructurales (Chasis, basculante...), y han sido obtenidos mediante su respectivo modelo en Catia V5, pues en el momento en el que se inició este proyecto, únicamente se tenían estos datos sobre el prototipo. Dicho esto, los parámetros empleados para los cálculos y simulaciones son los que siguen:

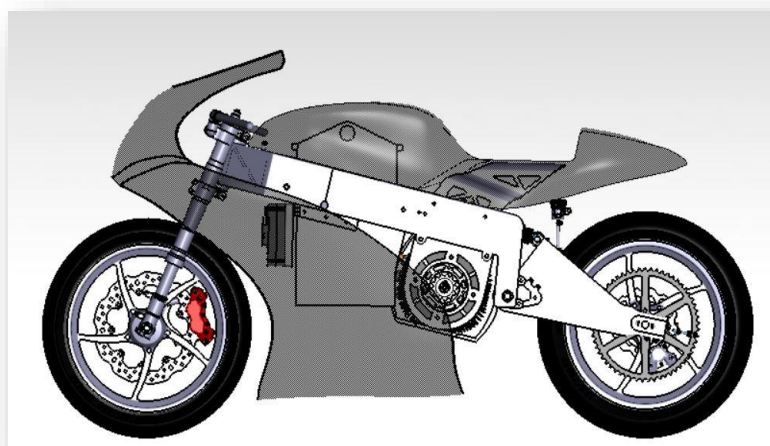


Figura 2.3.- Modelo en Catia del prototipo

Parámetro	Símbolo	Valor
Masa chasis	m_c	126 kg
Masa basculante	m_3	4.365 kg
Masa horquilla	m_4	8.34 kg
Masa rueda trasera	m_5	8.5 kg
Masa rueda delantera	m_6	6.67 kg
Inercia de cabeceo del chasis	I_c	1.165 kg.m ²
Inercia basculante	I_3	0.139 kg.m ²
Inercia horquilla	I_4	0.269 kg.m ²
Inercia rueda trasera	I_5	0.817 kg.m ²
Inercia rueda delantera	I_6	0.6 kg.m ²
Rigidez suspensión trasera	k_{32}	8252.9 N/rad
Rigidez suspensión delantera	k_{42}	10000 N/m
Rigidez neumático trasero	k_5	200000 N/m
Rigidez neumático delantero	k_6	200000 N/m
Amortiguamiento suspensión trasera	c_{32}	700 Ns/rad
Amortiguamiento suspensión delantera	c_{42}	500 Ns/m
Amortiguamiento rueda trasera	c_5	0 Ns/m
Amortiguamiento rueda delantera	c_6	0 Ns/m
Radio de las ruedas	R	0.3 m

Tabla 2.1.- Parámetros del sistema

2.2.- Ecuaciones de movimiento

Para el cálculo de las ecuaciones de movimiento se hará uso de las Ecuaciones de Lagrange, por lo que será necesario definir las energías cinética y potencial del sistema, la función de disipación de Rayleigh y las fuerzas generalizadas. Dado que todo ello debe ir expresado en función del vector de coordenadas generalizadas, \mathbf{q} , conviene expresar, en primera instancia, las posiciones de los distintos sólidos en el plano $\langle X, Z \rangle$, situando el sistema de referencia en el punto de apoyo de la rueda trasera y haciendo uso de los puntos auxiliares **A** y **B**, que son, respectivamente, el punto más alto de la suspensión delantera, que, además, es solidario al chasis, y el eje de rotación entre chasis y basculante, que representa una articulación entre ambos sólidos en este modelo bidimensional. Los puntos G_i hacen referencia a los respectivos centros de gravedad. Como anotación para el lector, en los Anexos del proyecto se incluye un diagrama de flujo del script de Matlab utilizado para la resolución del mismo.

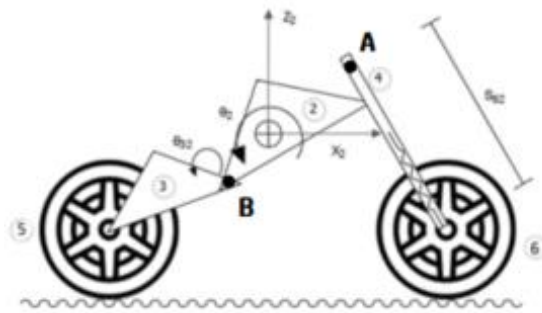


Figura 2.4.- Esquema del modelo con puntos auxiliares A y B

Será necesario, además, definir las matrices de rotación de chasis y basculante como sigue:

$$A_c = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$A_B = \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) \end{pmatrix}$$

Siendo $\theta_3 = \theta_2 + \theta_{32}$ el ángulo de giro del basculante. Por tanto, las posiciones de los distintos sólidos se expresan:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= [x_2, z_2] \\ \mathbf{r}_A &= \mathbf{r}_2 + A_c \cdot G_2 A \\ \mathbf{r}_6 &= \mathbf{r}_A + S_{42} \\ \mathbf{r}_4 &= \mathbf{r}_6 + A_c \cdot G_6 G_4 \\ \mathbf{r}_B &= \mathbf{r}_2 + A_c \cdot G_2 B \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_B + A_B \cdot B G_3 \\ \mathbf{r}_5 &= \mathbf{r}_B + A_B \cdot B G_5 \end{aligned}$$

Las velocidades de los distintos sólidos se obtienen haciendo uso de la regla de la cadena, ya que, al realizarse los cálculos de un modo numérico en Matlab y ser desconocida la variación temporal de los distintos desplazamientos, esto permite expresar las velocidades en función del jacobiano de la posición respecto al vector de coordenadas generalizadas, que, en definitiva, es lo que se busca:

$$v_i = \frac{dr_i}{dt} = \frac{dr_i}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\partial r_i}{\partial q} \right) \dot{q}$$

Para la energía cinética también será necesario calcular la inercia del sólido 2 mediante el teorema de Steiner, pues está compuesto por distintos sólidos: el chasis y elementos solidarios y la horquilla. De este modo, se define:

$$I_2 = I_c + m_c r_c^2 + I_4 + m_4 r_4^2$$

Donde r_c y r_4 son, respectivamente, las distancias del centro de gravedad del chasis y horquilla al centro de gravedad del sistema compuesto por ambos sólidos.

2.2.1.- Energía cinética del sistema

La energía cinética del sistema será la suma de la energía cinética de los distintos sólidos, quedando:

$$T = T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \dot{r}_3^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_3^2$$

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 \dot{r}_4^2$$

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 \dot{r}_{5x}^2 + \frac{1}{2} I_5 \left(\frac{v_{5z}}{R} \right)^2$$

$$T_6 = \frac{1}{2} m_6 \dot{r}_{6x}^2 + \frac{1}{2} I_6 \left(\frac{v_{6z}}{R} \right)^2$$

2.2.2.- Energía potencial del sistema

La energía potencial del sistema es la asociada a las elongaciones de las suspensiones y de los neumáticos, que son representados por sendos muelles, cuya rigidez quedó indicada en el anterior subapartado 2.1.

$$V = \frac{1}{2} k_{32} (\theta_{32} - \theta_{32_0})^2 + \frac{1}{2} k_{42} (s_{42} - s_{42_0})^2 + \frac{1}{2} k_5 (r_{5z} - R)^2 + \frac{1}{2} k_6 (r_{6z} - R)^2$$

Es útil representar esta elongación respecto a una posición indeformada (Subíndice 0 para las suspensiones, R para las ruedas), ya que, al aplicar las ecuaciones de Lagrange, serán estos términos no dependientes de las coordenadas generalizadas los que conformen una parte de las fuerzas generalizadas, que serán empleadas para el cálculo de la posición de equilibrio en torno a la que va a oscilar el sistema, que es, al fin y al cabo, las vibraciones que se pretenden estudiar.

2.2.3.- Función de disipación de Rayleigh

La función de disipación de Rayleigh viene caracterizada por los coeficientes de amortiguamiento que, en este caso, son los correspondientes a ambas suspensiones:

$$F_R = \frac{1}{2}c_{32}\dot{\theta}_{32} + \frac{1}{2}c_{42}\dot{s}_{42}$$

2.2.4.- Fuerzas generalizadas

El vector de fuerzas generalizadas, \mathbf{Q} , se obtiene al sumar los términos libres procedentes de las ecuaciones de Lagrange, como se ha indicado en el subapartado 2.2.2, y la energía potencial gravitatoria debida al peso de los sólidos:

$$F_{grav} = g(m_2z_2 + m_3z_3 + m_4z_4 + m_5z_5 + m_6z_6)$$

$$Q_{grav} = \frac{\partial F_{grav}}{\partial q}$$

2.2.5.- Ecuaciones de Lagrange. Matrices de masa, amortiguamiento y rigidez

Obtenidas las energías cinética y potencial del sistema, la función de disipación de Rayleigh y el vector de fuerzas generalizadas, se aplican las ecuaciones de Lagrange, cuyo resultado son las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial F_R}{\partial \dot{q}} = Q$$

$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Q$

\mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} representan, respectivamente, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema presentado en este apartado

2.3.- Frecuencias naturales y modos de vibración del sistema

Una vez evaluadas las matrices de masa y rigidez, es interesante calcular las frecuencias naturales y modos de vibración del sistema, ya que a estas frecuencias de vibración es a la que se van a obtener las mayores amplitudes de vibración, lo cual será interesante para

posteriormente dimensionar el absorbedor. El modo de calcularlas es resolviendo el problema de vibración libre:

$$M\ddot{q} + Kq = 0$$

Cuya solución será del tipo:

$$q = \varphi e^{\lambda t}$$

Que, al sustituir en la ecuación de movimiento, lleva a

$$(\lambda^2 M + K)\varphi e^{\lambda t} = 0$$

O, lo que es lo mismo:

$$(\lambda^2 M + K)\varphi = 0$$

Esta ecuación resulta interesante, pues λ representa los autovalores del sistema, los cuales están estrechamente relacionados con las frecuencias naturales, pues $\omega_n^2 = -\lambda^2$.

Por otro lado, φ representa los autovectores del sistema. O lo que es lo mismo, los modos de vibración. Esta parte resulta importante, pues la manera en que se van a mover los grados de libertad del sistema va a ser una combinación lineal de estos modos de vibración. Es decir, los movimientos posibles del sistema una vez sea excitado, no son aleatorios, si no que el resultado estará contenido en el subespacio vectorial que conforman estos autovectores. Si se normaliza un autovector, por ejemplo, respecto a la segunda coordenada (Movimiento vertical del chasis), este autovector nos ofrece la información sobre cómo se va a desplazar el conjunto entero si dicha coordenada se desplazase un valor unidad. Del mismo modo, se puede conocer cómo se va a deformar el sistema si se excita con movimientos verticales de las ruedas, producidos por irregularidades del terreno, como se quiere estudiar en este proyecto. Por ello, los modos de vibración son importantes en el estudio de las vibraciones, pues conocida la excitación, se puede predecir la deformación resultante gracias a estos modos de vibración, permitiendo anticiparse y atenuar o bloquear esos movimientos.

2.4.- Linealización en torno a la posición de equilibrio

En los sucesivos apartados, se va a implementar el absorbedor en el sistema con el fin de atenuar las vibraciones del sistema. De cara a estudiar la influencia de los parámetros del absorbedor, los cuales se presentarán en el próximo apartado, se va a linealizar el sistema en torno a la posición de equilibrio resultante de aplicar las fuerzas gravitatorias anteriormente mencionadas. Esta linealización consiste en definir las posiciones del sistema, q , como la suma de dos términos: el primero se corresponde con la posición de equilibrio en torno a la que va a oscilar el sistema, y el segundo se corresponderá con las oscilaciones que se quieren estudiar en torno a dicha posición, que, en el caso del sistema linealizado, se suponen pequeñas. Esto va a permitir un análisis numérico más sencillo, pues haciendo un pequeño desarrollo en serie, los términos no lineales (Senos y cosenos), pasan a ser términos constantes o lineales (De orden uno), los cuales, al derivarse, quedan como términos constantes o desaparecen, pasando de tener matrices de masa y rigidez que dependen de la posición de cada instante a tener matrices constantes dependientes únicamente de la posición de equilibrio y, por tanto, de los parámetros del sistema, que es donde entrarán en juego los parámetros del absorbedor.

El cálculo de la posición de equilibrio, q_{eq} , se realiza de un modo numérico en Matlab con el comando *fsolve*, el cuál permite resolver ecuaciones no lineales. Este comando recibe una posición inicial, en este caso, la indeformada (Obtenida del modelo de Catia), y las respectivas

matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, así como el vector de fuerzas generalizadas, y devuelve el valor de la posición (q_{eq}) para el que se cumple dicha igualdad. Es decir, el sistema parte de una posición indeformada y, al aplicar las fuerzas externas (Las fuerzas gravitatorias y los términos correspondientes a las fuerzas que ejercen los neumáticos y suspensiones al variar esta posición), el sistema se estabiliza en una nueva posición, que es la que se ha denominado como “posición de equilibrio”, en la cuál estas fuerzas gravitatorias se equilibran con las fuerzas elásticas del sistema. Para el cálculo de esta posición, debe notarse que el sistema puede expresarse en función de la posición y la velocidad:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Q \longrightarrow M(q)\ddot{q} = f(\dot{q}, q)$$

Al buscar una posición de equilibrio, debe imponerse que tanto la velocidad como las aceleraciones del sistema sean nulas, $\ddot{q}_{eq} = \dot{q}_{eq} = 0$, lo que lleva a la ecuación que proporciona la posición de equilibrio:

$$f(0, q_{eq}) = 0 \longrightarrow q_{eq}$$

Las posiciones indeformada y de equilibrio son:

Posición indeformada de partida: $q = [0.762, 0.773, 0, 0.27, 0.62]^T$

Posición de equilibrio:	$q_{eq} = [0.762, 0.529, 0.02, 0.15, 0.6]^T$
-------------------------	--

Obtenida la posición de equilibrio, para linealizar el sistema, se expresa, como ya se ha adelantado, el vector de coordenadas del sistema como la suma de la posición de equilibrio más las pequeñas vibraciones en torno a ella:

$$q = q_{eq} + x; \quad \dot{q} = \dot{x}; \quad \ddot{q} = \ddot{x}$$

Sustituyendo estas igualdades en las ecuaciones de movimiento, haciendo un pequeño desarrollo en serie y obviando términos de orden superior o que se hacen 0 por las condiciones de estar evaluando en torno a una posición de equilibrio, se llega a la ecuación de movimiento del sistema linealizado a partir de las ecuaciones de movimiento del sistema que, a priori, contenía términos no lineales:

$$M(q_{eq} + x)\ddot{x} = f(\dot{x}, q_{eq} + x)$$

$$(M(q_{eq}) + \frac{\partial M}{\partial q}|_{q_{eq}}x + \dots)\ddot{x} = f(0, q_{eq}) + \frac{\partial f}{\partial q}|_{0, q_{eq}}x + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}}|_{0, q_{eq}}\dot{x} + \dots$$

$$M(q_{eq})\ddot{x} = \frac{\partial f}{\partial q}|_{0, q_{eq}}x + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}}|_{0, q_{eq}}\dot{x}$$

$$M_e\ddot{x} = -K_ex - C_e\dot{x}$$

Ecuaciones de movimiento del sistema linealizado en torno a la posición de equilibrio.

Con el fin de cuantificar la validez de esta linealización, se comparan las frecuencias naturales del sistema no lineal y del sistema lineal:

$$\omega_{no_lineal} = \begin{pmatrix} 147.27 \\ 146.3 \\ 31.484 \\ 8.1549 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \omega_{lineal} = \begin{pmatrix} 145.01 \\ 143.17 \\ 55.677 \\ 7.667 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se aprecia la similitud de todas las frecuencias, excepto de la tercera, como era de esperar, pues al haber eliminado términos dependientes de senos y cosenos se pierde información. Aun así, como se mostrará en los siguientes apartados, el modelo lineal es lo suficientemente aproximado como para sacar conclusiones válidas aplicables al sistema no lineal.

Capítulo 3.- Mass damper

3.1.- Preliminares

Antes de pasar a implementar el mass damper en el modelo, interesa introducir el dispositivo con el fin de saber qué es exactamente, cómo funciona y cómo se le puede sacar provecho y en qué situaciones. Para ello, a lo largo de este capítulo, se pretende introducir el funcionamiento de esta tecnología y estudiar el efecto de sus parámetros en un sistema sencillo de un grado de libertad, para poder sacar ciertas conclusiones, de modo que una vez se implemente el absorbedor en el sistema, se pueda optimizar directamente.

3.1.1.- Qué es un mass damper

Un mass damper, o absorbedor pasivo de vibraciones, no es más que un sistema vibratorio masa-resorte relativamente pequeño en comparación con el sistema al que se acopla, que se *sintoniza* de modo que su frecuencia natural sea igual a la frecuencia que excita al sistema principal. El funcionamiento del absorbedor es el siguiente: Una fuerza excitadora, en este caso senoidal, hará que el sistema oscile en torno a una posición de equilibrio, incluido el absorbedor. La idea es que, dado que el absorbedor va a vibrar a la frecuencia de excitación, se puede aprovechar este movimiento para contrarrestar la fuerza excitadora, pues se puede colocar de modo que la reacción que cree en el sistema primario tenga la misma dirección y sentido contrario que la fuerza excitadora, de modo que ambas fuerzas resulten ser ondas *destructivas* entre sí. Es decir, se introduce una nueva excitación provocada por el absorbedor sobre el sistema de modo que la fuerza resultante tenga una amplitud menor que la fuerza original, de modo que las amplitudes de las oscilaciones producidas también serán menores. Es en este punto donde hay que identificar los parámetros del absorbedor y cómo dimensionarlos para conseguir que esta idea funcione correctamente.

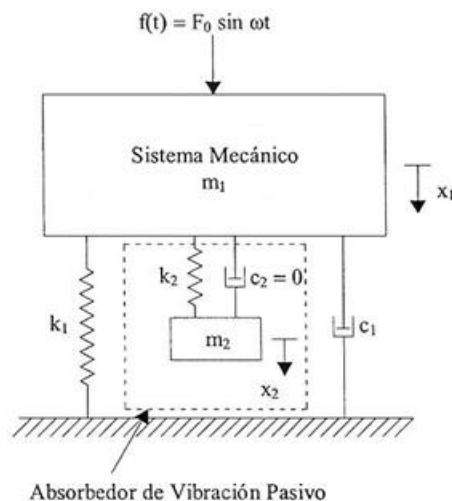


Figura 3.1.- Esquema de un sistema mecánico con un mass damper

3.1.2.- Definición de los parámetros de un mass damper

Una vez definido lo que es un mass damper, la identificación de los parámetros parece bastante evidente, pues, al fin y al cabo, no deja de ser una masa conectada rígidamente al extremo de un resorte, con lo que las variables que van a definir su comportamiento serán, a priori, la masa del absorbedor y la rigidez de su resorte. Siendo un poco más pragmáticos, resulta conveniente leer con detenimiento la definición de lo que es un absorbedor pasivo de vibraciones, pues en ella se nombran dos cuestiones que son las que aquí interesa definir:

En primer lugar, se dice que es un conjunto masa-resorte de masa relativamente pequeña, lo cual ya deja claro cuál es el primer parámetro real que interesa dimensionar: la relación entre masas del sistema original y del absorbedor. Evidentemente, para una masa primaria fija, definir esta relación es lo mismo que darle un valor concreto a la masa del absorbedor, pero, si se estuviera diseñando el sistema primario (Parámetros no definitivos), esta relación, al ser adimensional, permite buscar una relación entre la masa que hay que añadir y la masa del sistema original, sin importar cómo de masivo es el sistema o las unidades en las que se mide. Este parámetro, en adelante, se denominará con la letra griega β , y designará la relación entre la masa del absorbedor y la del modelo original: $\beta = \frac{m_2}{m_1}$.

En segundo lugar, se habla de “sintonizar”^[3] la frecuencia natural del absorbedor con la frecuencia de excitación, esto es, igualarlas. En teoría básica de vibraciones se estudia que las amplitudes máximas de un sistema en vibración se consiguen cuando éste se excita a su frecuencia natural, de modo que, parece evidente que si lo que se busca es que el movimiento del absorbedor contrarreste el desplazamiento creado por la fuerza excitadora, entonces hay que conseguir que el mass damper trabaje a su frecuencia natural, de modo que atenúe lo máximo posible esta fuerza excitadora. En otras palabras, será a la frecuencia natural del absorbedor a la que se consiga un mayor rendimiento de funcionamiento, y, por tanto, una mayor atenuación de las oscilaciones. Dado que la fuerza excitadora no tiene por qué trabajar a una frecuencia constante, puede ser que se precise sintonizar el absorbedor con alguna de las frecuencias naturales del sistema original porque, en ese caso, se creen perturbaciones en el sistema que puedan generar cierta inestabilidad, pues al fin y al cabo, la intención es implementar el dispositivo en una moto de competición, por lo que, conseguir que, por ejemplo, el manillar vibre menos, puede ser la diferencia entre acabar una carrera o caerse en una curva. Dicho esto, el segundo parámetro a definir es la relación entre la frecuencia natural del absorbedor y la del sistema original (O una de ellas, la que se quiera atenuar) $\delta = \frac{\omega_{n2}}{\omega_n}$.

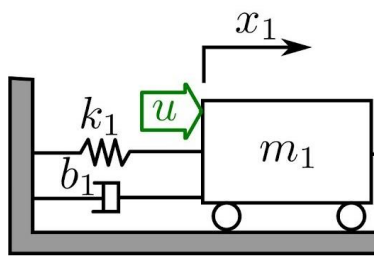
En conclusión, los parámetros que van a definir el absorbedor no son su masa y su rigidez, si no su masa y su frecuencia natural, de modo que, elegidos ambos, la rigidez del mismo queda automáticamente definida ($\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$). El modo de dimensionar dichos parámetros será definiendo β y δ , cuyos efectos se estudian en los siguientes apartados.

3.2.- Aplicación a un sistema de un grado de libertad

Definidos los parámetros a estudiar, se procede a implementar el dispositivo en un sistema simple masa-resorte-amortiguador para ver sus efectos. Para ello, se aplicará una fuerza senoidal en el “carrito” (Así es como se denomina a este sistema simple), y se expondrán tanto su respuesta en régimen permanente como su respuesta en frecuencia (Amplitud vs frecuencia de excitación). Posteriormente, se acoplará el absorbedor al sistema (segundo carrito masa-resorte) y se harán sendos barridos de relación de masas y frecuencias. Es decir, por un lado, se fijará el valor de δ para estudiar el efecto de la masa del absorbedor, y después al revés, de modo que se obtengan las conclusiones sobre el efecto de los valores de β y δ , pudiendo demostrar que, con una buena combinación de los mismos, es posible eliminar casi por completo la vibración del carrito original.

3.2.1.- Sistema de un grado de libertad en vibración

El sistema de un grado de libertad a estudiar es el clásico caso del “carrito”, cuyo esquema y parámetros se muestran a continuación:



$$m_1 = 10 \text{ kg}$$

$$k_1 = 150 \text{ N/m}$$

$$c_1 = 1 \frac{\text{N}}{\text{m.s}}$$

$$U = 0.05 \cos(\omega t) \text{ N}$$

Figura 3.2.- Esquema del sistema de un grado de libertad

Al excitarlo con la fuerza externa U , se obtiene la respuesta en régimen permanente que se muestra en la figura 3.3. Para una posterior comparación, se muestra, además, en la figura 3.4, las amplitudes de este sistema en función de la frecuencia de excitación, donde el máximo se consigue al excitarlo a su frecuencia natural, como se adelantó anteriormente. En el siguiente subapartado se implementa el absorbedor en el sistema, y se pasa a estudiar su efecto en el próximo apartado.

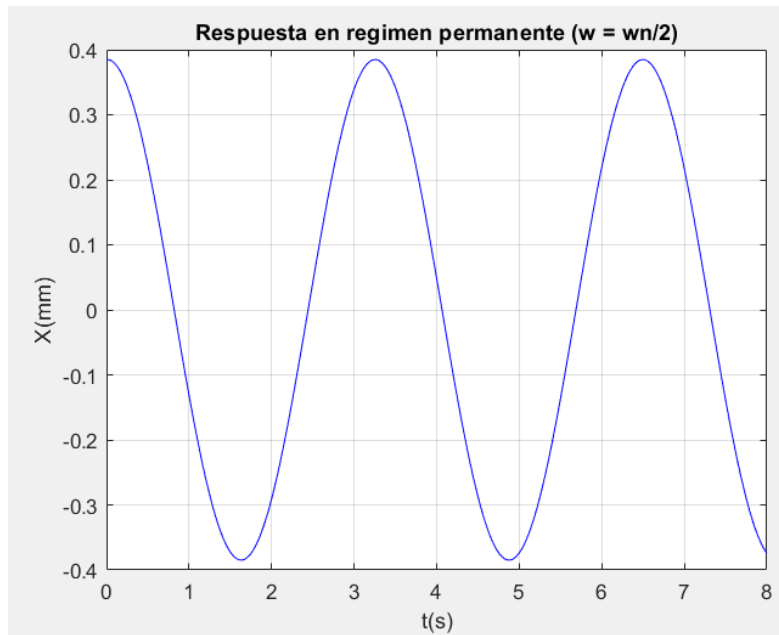


Figura 3.3.- Respuesta en régimen permanente del sistema de un grado de libertad al excitarlo a la mitad de su frecuencia natural

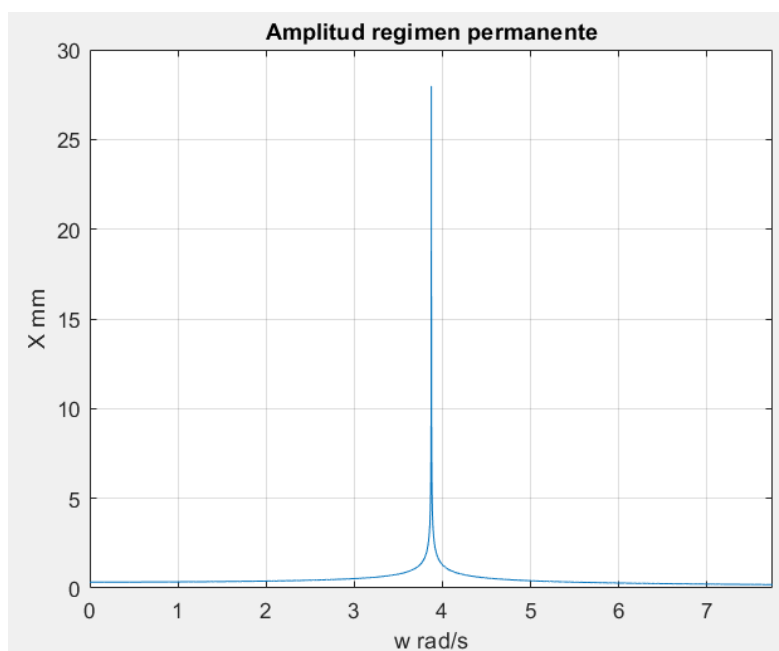


Figura 3.4.- Amplitud de la respuesta del sistema de un grado de libertad en función de la frecuencia a la que se excita

3.2.2.- Implementación del mass damper en un sistema de un grado de libertad

Al implementar el absorbedor, el sistema pasa de tener un grado de libertad a tener dos. Esto tiene como consecuencia que ahora las ecuaciones de movimiento serán matriciales, en este caso, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (El desplazamiento de cada carrito). Lo interesante de haber más de un grado de libertad son los modos en los que el sistema puede

vibrar, es decir, hacia dónde se va a desplazar cada masa cuando se excite el sistema. En este caso, si se define el vector de coordenadas como $\mathbf{q} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]^T$, (Véase figura 3.5), las formas de vibrar del sistema serán

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

o una combinación lineal de ambos modos. Esto recalca la capacidad del absorbedor de desplazarse en igual dirección, pero sentido contrario que la masa del carrito inicial (Modo 2), lo que se traducirá en una atenuación de la oscilación de la masa primaria, como queda reflejado en la figura 3.6 para unos valores cualesquiera de los correspondientes parámetros.

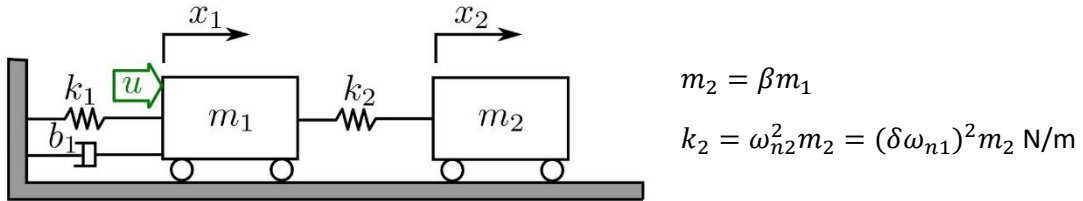


Figura 3.5.- Sistema de un grado de libertad con un mass damper acoplado

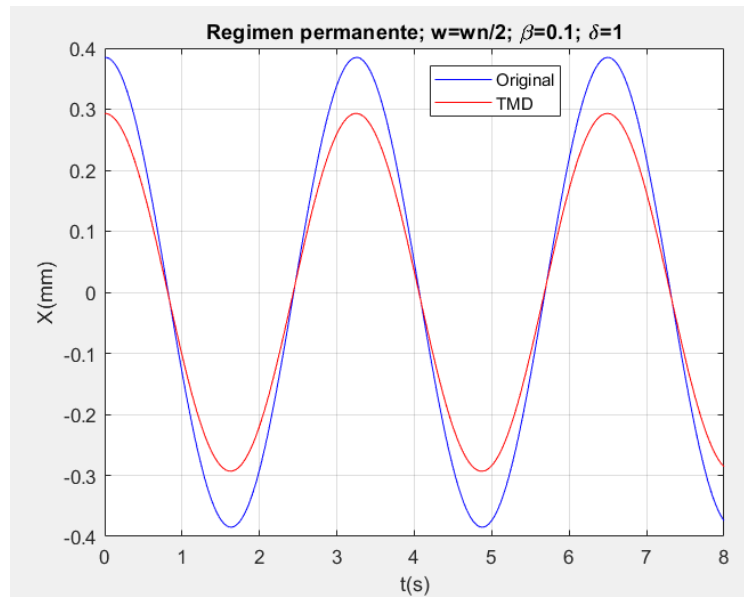


Figura 3.6.- Primera comparación de respuestas en régimen permanente con y sin mass damper

***Nota:** Como el absorbedor no tiene amortiguamiento, las respuestas se han calculado en Matlab como las soluciones del sistema desacoplado de dos ecuaciones y dos incógnitas, en las que cada una de las

soluciones se calcula como
$$X = \frac{U/k}{\sqrt{(1-\frac{w}{w_n})^2 + (2c\frac{w}{w_n})^2}} e^{iwt}$$

3.3.- Efecto de la frecuencia del absorbedor

Tras haber implementado el absorbedor en el sistema de un grado de libertad, lo siguiente es comprobar cuáles son efectos de su masa y frecuencia natural. Para ello, se comienza por ver las consecuencias de elegir una u otra frecuencia natural, como se muestra en el barrido de la figura 3.7, en la cual se fija la relación de masas en 0.5 (La masa del absorbedor será la mitad de la masa primaria, $\beta = 0.5$) y se variará la relación entre frecuencias naturales, $\delta = \frac{\omega_n2}{\omega_n}$:

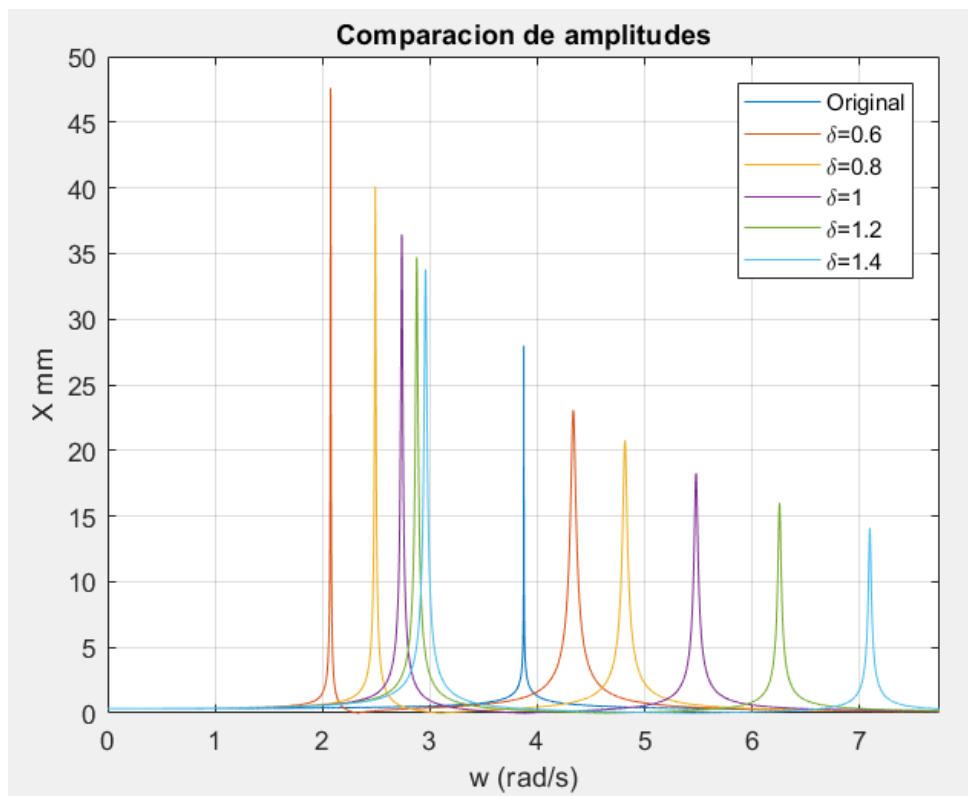


Figura 3.7.- Efecto de la frecuencia natural del absorbedor

Lo primero que debe notarse, es que la frecuencia natural del primer carrito queda desplazada hacia la izquierda, pasando a ser menor, mientras que aparece una segunda frecuencia natural mayor, correspondiente al absorbedor. Al introducir el mass damper, resulta que para frecuencias igual o próximas a la que entonces era la frecuencia natural del sistema, ahora las amplitudes tienen a ser nulas, que es el objetivo de este proyecto, pero las amplitudes correspondientes a las nuevas frecuencias naturales de la misma masa son mayores. Esto representa el principal problema de este dispositivo, y es que únicamente es efectivo en las cercanías de las frecuencias a las que se sintoniza, pudiendo ofrecer peores resultados lejos de las mismas. Por otro lado, cuanto mayor sea la relación entre frecuencias naturales, y, por tanto, mayor sea la del absorbedor, menos va a variar la frecuencia natural del sistema original, menos va a aumentar su amplitud lejos de la misma, y mayor va a ser el rango de frecuencias para el que las amplitudes se atenúan. Por consiguiente, un δ mayor ofrecerá un mayor rango aprovechable, pero la frecuencia natural de mayor amplitud seguirá próxima a la original.

3.4.- Efecto de la masa del absorbedor

En cuanto al efecto de la masa del absorbedor, siguiendo el mismo procedimiento que con la frecuencia natural, se procede a mostrar el barrido para un $\delta = 1$, variando la relación entre masas, $\beta = \frac{m_2}{m_1}$:

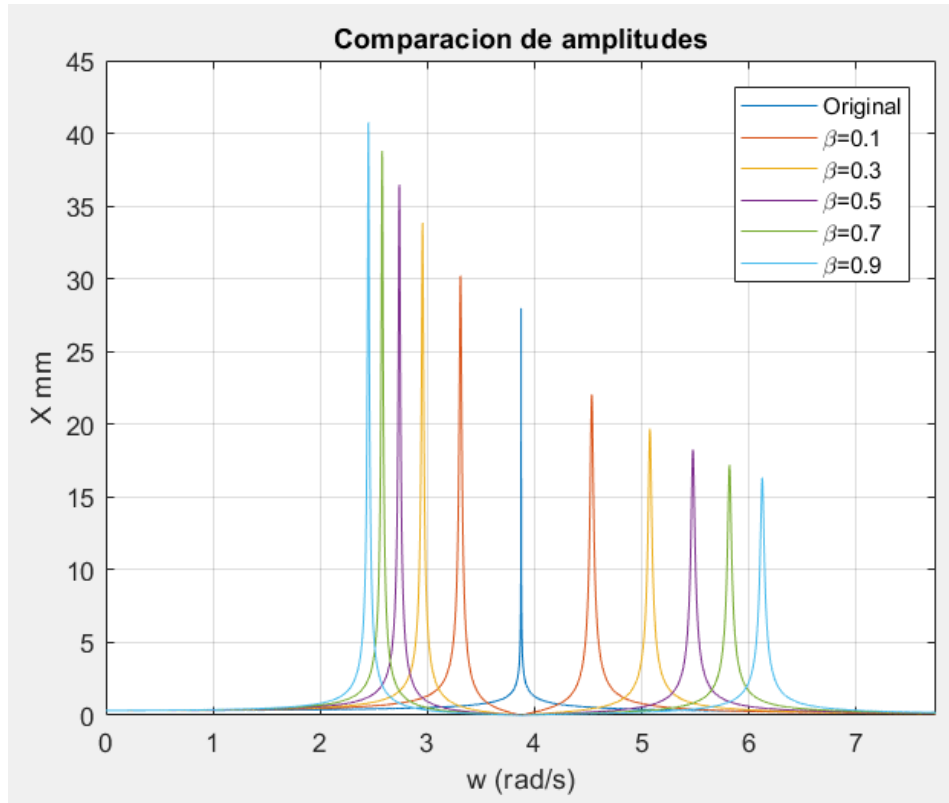


Figura 3.8.- Efecto de la masa del absorbedor

Conviene recalcar que, para la frecuencia natural del absorbedor, las vibraciones se han eliminado para cualquier valor de la masa acoplada, lo cual confirma que la idea es implementable. El resultado es similar al efecto de la frecuencia: Cuanto mayor sea la masa del absorbedor mayor es el rango para el que se atenúan las vibraciones, pero tiene un efecto contrario, pues lejos de este rango, de nuevo, las amplitudes aumentan. Otra conclusión interesante es que, aun para una masa pequeña, el absorbedor puede ofrecer resultados beneficiosos para la frecuencia sintonizada.

3.5.- Conclusiones

Como conclusiones, se obtienen que, en primer lugar, el mass damper tiene una limitación, pues únicamente tiene un efecto positivo sobre cierto rango de frecuencias de excitación, siendo este efecto máximo en la frecuencia sintonizada. Además, un mayor valor de la masa del absorbedor implica un mayor rango de influencia, así como una mayor reducción de las amplitudes en las proximidades de la frecuencia natural elegida. Por último, una relación δ mayor parece implicar un abanico de frecuencias más amplio en el que se puede aprovechar los beneficios de este dispositivo, además de ser menores los efectos negativos que se podrían obtener. Por tanto, interesa una masa lo mayor posible, y sintonizar la frecuencia natural del absorbedor con la de excitación en caso de ser constante, o mayor en caso de que la frecuencia de excitación vaya a ser variable.

3.6.- Comparación de resultados tras la implementación del mass damper

Obtenidas estas conclusiones, se pasa a ponerlas en práctica en el sistema de dos grados de libertad desarrollado en este apartado: Excitando ahora el sistema a la frecuencia natural original, sintonizando la frecuencia del absorbedor a la de excitación, se comprueba cómo con una relación de masas del 10% se puede anular prácticamente la totalidad de la vibración:

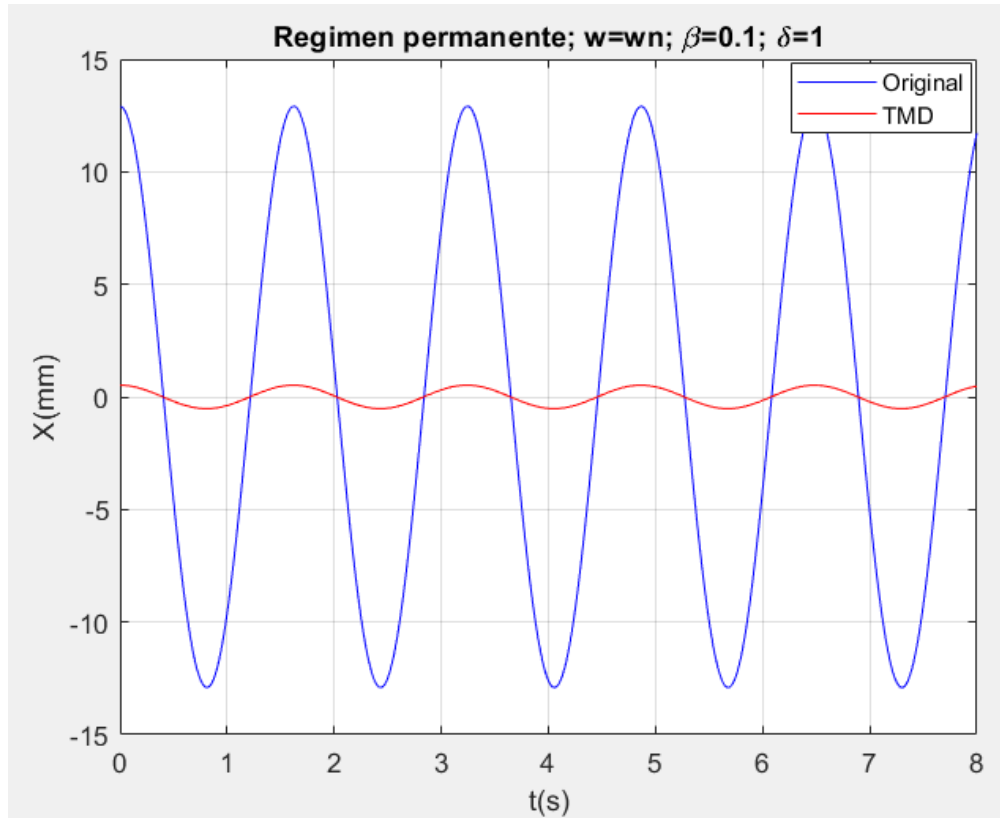


Figura 3.9.- Aplicación de las conclusiones obtenidas. Eliminación de la vibración del sistema

Capítulo 4.- Implementación del mass damper en el sistema

Tras haber introducido lo que es un mass damper, cómo funciona y cuáles son sus parámetros y efectos sobre el sistema al que se acopla, se procede a introducirlo en el sistema mecánico con el que se ha descrito el prototipo a lo largo del segundo apartado. Para ello, se calculan las nuevas ecuaciones de movimiento y el nuevo punto de equilibrio en torno al que oscilará el sistema una vez se le haya acoplado el absorbedor.

4.1.- Nuevas ecuaciones de movimiento

Para desarrollar las nuevas ecuaciones de equilibrio, el procedimiento a seguir es exactamente el mismo, pero añadiendo un nuevo grado de libertad, s_7 , que denotará la elongación del resorte del absorbedor, el cual irá inicialmente posicionado en el eje de la rueda delantera, como se muestra en la figura 4.1. De este modo, obteniendo su posición en el plano $\langle X, Z \rangle$ respecto al centro de gravedad del sólido 2, como se hizo con el resto de sólidos, se puede obtener su energía cinética en función del vector de coordenadas, así como su energía potencial, de modo que se pueden aplicar las ecuaciones de Lagrange como se hizo en el apartado 2, añadiendo estas nuevas energías a las que ya se habían calculado como sigue:

$$\mathbf{r}_7 = \mathbf{r}_6 + \mathbf{S}_7; \quad \dot{\mathbf{r}}_7 = \frac{\partial \mathbf{r}_7}{\partial \mathbf{q}_{TMD}}$$

$$T_{TMD} = T_{sistema} + \frac{1}{2} m_7 \dot{\mathbf{r}}_7^2$$

$$V_{TMD} = V_{sistema} + \frac{1}{2} k_7 s_7^2$$

Donde el subíndice “TMD” implica que está referido al sistema en el que se implementa el “Tuned Mass Damper” (Literalmente, amortiguador de masas sintonizado). Al aplicar las ecuaciones de Lagrange, los respectivos jacobianos se calculan respecto al nuevo vector de coordenadas, \mathbf{q}_{TMD} :

$$\mathbf{q}_{TMD} = \begin{pmatrix} x_2 \\ z_2 \\ \theta_2 \\ \theta_{32} \\ s_{42} \\ s_7 \end{pmatrix}$$

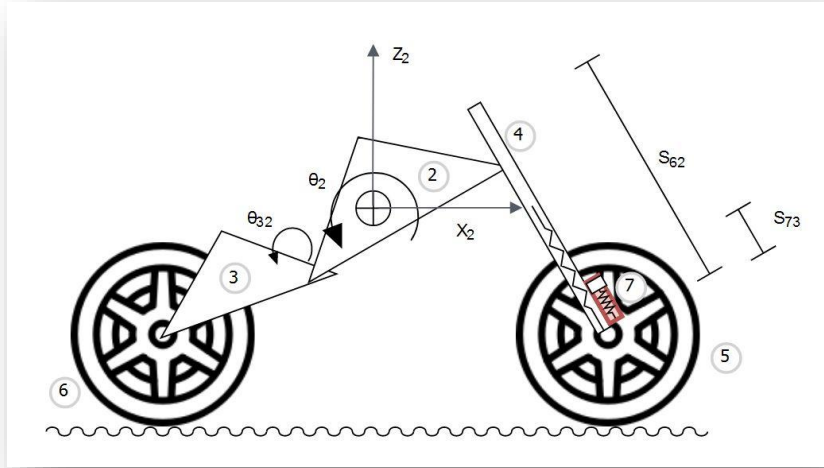


Figura 4.1.- Esquema y grados de libertad del modelo con mass damper acoplado

Definidas las nuevas energías cinética y potencial, basta con repetir el proceso utilizado en el segundo apartado de este proyecto:

Cálculo de las ecuaciones de movimiento mediante las ecuaciones de Lagrange ($L = T - V$):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{TMD}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{TMD}} + \frac{\partial F_R}{\partial \dot{q}_{TMD}} = Q$$

Que proporcionará las respectivas matrices de masa, rigidez y amortiguamiento, esta vez de tamaño 6x6, y que, de nuevo, dependerán de la posición y velocidad del sistema, por lo que para poder evaluarlas es preciso conocer dichos valores para algún instante. Evidentemente, las matrices de masa y rigidez dependerán de los parámetros que se elijan para el mass damper, por lo que serán distintas para cada caso estudiado, así como su respectiva posición de equilibrio, por lo que, aunque el proceso de cálculo sea el mismo, debe notarse que las frecuencias naturales y, por tanto, los modos de vibración de este nuevo sistema serán particulares para cada par de parámetros elegidos, que es lo que se pretende estudiar a lo largo de los próximos capítulos. El hecho de que ahora las matrices sean de 6x6 y no de 5x5 no suponen un problema para las comparaciones, pues debe recordarse que cada coordenada ofrece un significado físico real. Por ejemplo, si se comparan la segunda coordenada de ambos sistemas, se estarían viendo las diferencias entre las oscilaciones verticales del centro de gravedad del sólido 2, que es, precisamente, lo que se busca en este proyecto.

$$M_{TMD} \ddot{q}_{TMD} + C_{TMD} \dot{q}_{TMD} + K_{TMD} q_{TMD} = Q$$

4.2.- Cálculo de la posición de equilibrio y linealización del sistema

Como se ha adelantado, la posición de equilibrio será dependiente de la pareja de parámetros, β y δ , que definen el absorbedor, pero la posición indeformada es la misma para todas ellas:

Posición indeformada de partida: $\mathbf{q}_{TMD} = [0.762, 0.773, 0, 0.27, 0.62, 0.05]^T$

El procedimiento para el cálculo de la posición de equilibrio es análogo que el empleado anteriormente:

- Definición de parámetros del absorbedor, β y δ .
- Evaluación de las ecuaciones de Lagrange para velocidades y aceleraciones nulas (Incluyendo las respectivas fuerzas gravitatorias y reacciones de los respectivos resortes), que dejarán como resultado la consecuente posición de equilibrio (Usando el programa Matlab como herramienta de resolución de esta operación con el comando *fsolve*).
- Linealización del sistema en torno a la posición de equilibrio obtenida en cada caso, suponiendo pequeños desplazamientos y despreciando términos de orden 2 o superior (Véase subapartado 2.4)

Claramente, al depender las matrices de masa y rigidez de las dimensiones del dispositivo, también lo harán las frecuencias del sistema completo, como se demostró en el apartado 3 al introducir esta tecnología y estudiar sus efectos sobre un sistema de un grado de libertad. Estos efectos sobre el sistema son los que se estudian y desarrollan en el apartado 6, pero antes se introducirán los escenarios bajo los que se llevan a cabo las distintas simulaciones en el apartado 5.

Capítulo 5.- Escenarios de simulación

Una vez obtenidas las ecuaciones de movimiento, tanto del sistema original como del sistema con el absorbedor acoplado, y tras haber linealizado ambos sistemas, lo que queda es ponerlo a prueba frente a unas excitaciones lo más realistas posibles, pues lo que interesa es sacar unas conclusiones que permitan fabricarlo e implementarlo en la vida real para el prototipo desarrollado por el equipo universitario US Racing. Para ello, se muestran a continuación las distintas fuerzas externas que se van a tener en cuenta durante la simulación y, posteriormente, se desarrollarán con más detalle las correspondientes al par motor aplicado y a las irregularidades del terreno, que son, al fin y al cabo, de las que va a depender la dinámica vertical que se pretende estudiar.

Dicho esto, las fuerzas o momentos externos que se han tenido en cuenta, así como el modo en el que han sido calculado son las que siguen (El valor de los parámetros vienen indicados en la *Tabla 1*, y son los que se utilizaron por el equipo en la etapa de desarrollo del prototipo):

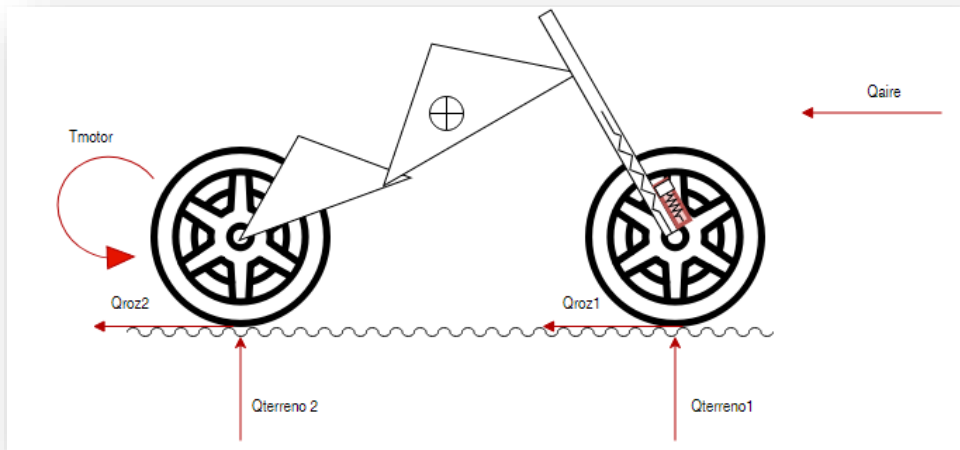


Figura 5.1.- Escenario de cargas del prototipo

- **Q_{aire}** : Resistencia aerodinámica. Se calcula como la mitad de la densidad del aire multiplicado por el coeficiente aerodinámico, por el área frontal proyectada y por la velocidad horizontal del prototipo al cuadrado ($\frac{1}{2} \rho_{aire} C_D A_f \dot{x}_2^2$)
- **$Q_{roz\ i}$** : Fuerza de rozamiento ejercida por el terreno sobre los neumáticos. Tanto la respectiva al neumático delantero como la correspondiente al trasero, se calculan como la multiplicación del coeficiente de rozamiento por cada una de las fuerzas normales (μN_i). El cálculo de las fuerzas normales es sencillo, pues haciendo sumatorio de momentos en el punto de apoyo se tiene que el momento que crea la fuerza normal delantera (A una distancia d igual a la distancia entre ejes de la moto) debe ser igual al creado por el peso de la moto desde su centro de gravedad ($\mu N_i d = m_T g \sum \frac{m_i x_i}{m_T}$), y ambas normales deben ser iguales al peso total de la moto, con lo que es un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que se resuelve fácilmente una vez se conozca la masa del absorbedor.

- **T_{motor}** : Es el par motor aplicado a la rueda trasera. Para darle realismo, se ha aplicado la curva del par motor real del motor *Engiro MSI920* proporcionado por la organización de *Motostudent* para la VI edición, como se expone en el apartado 5.1.
- **$Q_{terreno i}$** : Representa la irregularidad del terreno, que producirá desplazamientos verticales en los puntos de apoyo de ambas ruedas. Para el estudio se proponen un terreno senoidal y un terreno con rampas periódicas, el primero para representar el asfalto y el segundo para representar la superficie de los pianos que pueden encontrarse en los circuitos de competición.

Parámetro	Abreviatura	Valor
Densidad del aire	ρ_{aire}	1.29 kg/m ³
Coefficiente aerodinámico	C_D	0.3
Área frontal proyectada	A_f	0.25 m ²
Coefficiente de rozamiento	μ	0.3
Fuerza gravitatoria	g	9.81 m/s ²
Distancia entre ejes	d	1.38 m

Tabla 5.1.- Coeficientes empleados en las simulaciones

5.1.- Curva del par motor empleada

De cara a hacer una simulación que represente una aceleración del prototipo desde parado hasta su velocidad máxima, es necesario expresar el par motor que se aplica en la rueda trasera en función del vector de coordenadas, **q**. Se puede definir T_{motor} en función de la velocidad del eje de la rueda trasera, pues, como se indicó al inicio de este proyecto, bajo la condición de rodadura sin deslizamiento, existe una relación directa entre el giro de la rueda y su velocidad horizontal ($\dot{\theta}_5 = v_{5x}R$), se concluye que la aceleración angular producida por el par motor implica una aceleración lineal del centro de la rueda, la cual depende, a su vez, del resto de coordenadas, permitiendo relacionar del siguiente modo el par motor con el vector de coordenadas:

$$T_{motor} = T_{aplicado} \frac{\left(\frac{\partial \dot{r}_{5x}}{\partial q}\right)}{R}$$

Obtenida la expresión del par motor externo en función de las coordenadas que representan al sistema, falta por definir la amplitud del par aplicado, **$T_{aplicado}$** , que es donde entra en juego la curva del motor, expuesta a continuación:

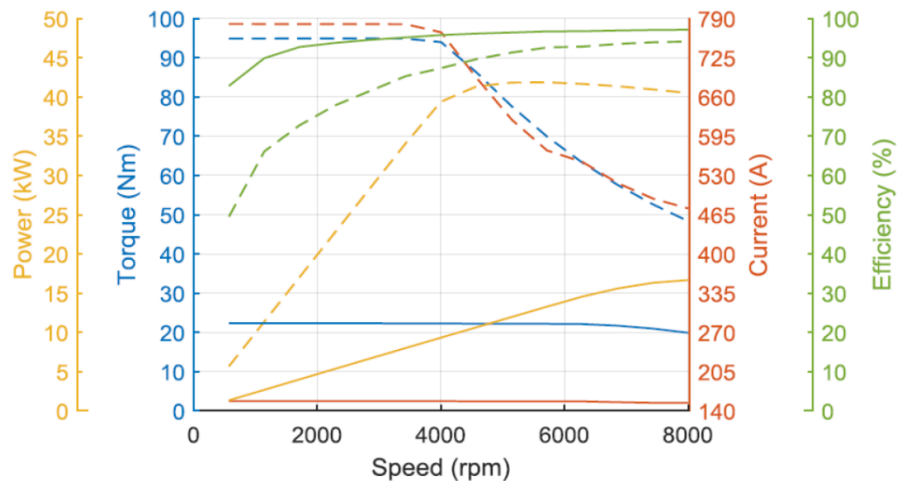
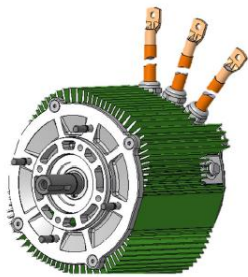


Figura 5.2.- Imagen del motor Engiro MS1920 y de su curva de par motor

La curva empleada para las simulaciones es la correspondiente al torque máximo para cada revolución del motor (Azul discontinua), cuya adaptación es reflejada en la figura 5.3:

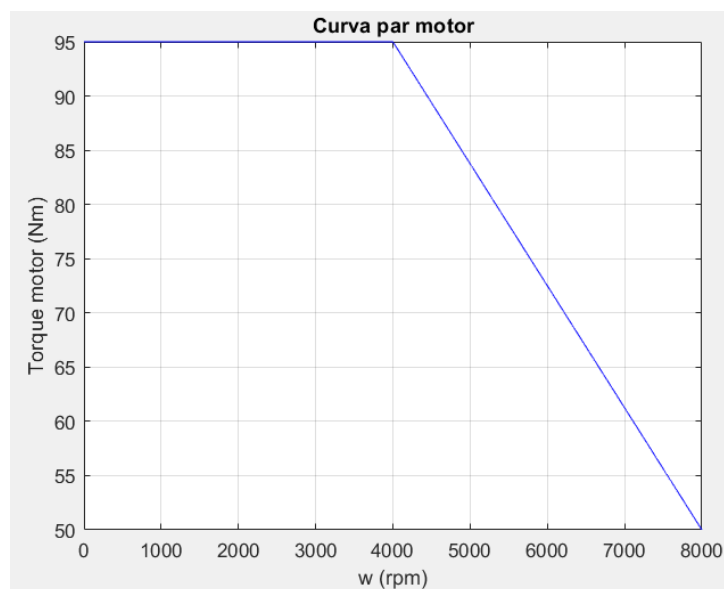


Figura 5.3.- Adaptación de la curva del torque del motor empleada para las simulaciones

Para obtener el par aplicado en cada instante se tiene en cuenta la relación de transmisión, que en este caso es única y de valor 4, ya que el piñón empleado cuenta con 13 dientes por 52 del plato trasero. Es decir, la rueda trasera dará una vuelta completa por cada 4 vueltas que complete el piñón. Esto es necesario recalcarlo, ya que la forma de resolver las ecuaciones en Matlab está hecha de tal manera que el programa calcula la velocidad del eje de la rueda trasera para el instante correspondiente en base a las condiciones iniciales de ese instante, que no son más que las posiciones y velocidades del instante anterior, y, a partir de ella, calcula la velocidad de giro de la rueda y, por tanto, del motor. Obtenida la velocidad de giro del motor, con la curva reflejada en la figura 5.3 se obtiene el par correspondiente aplicado en ese instante. En función de las fuerzas aplicadas en ese instante y usando las velocidades y posiciones de ese instante como condiciones iniciales para el siguiente, el programa resuelve las ecuaciones diferenciales que van obteniendo como resultado las sucesivas posiciones y

velocidades, y, con ellas, los valores del par motor que se va aplicando para cada valor temporal.

5.1.1.- Prueba de aceleración

Expuestas las fuerzas externas al sistema y el modo de calcular el par motor aplicado en cada instante, en la figura 5.4 se muestra el resultado obtenido en la prueba de aceleración que se pretendía llevar a cabo. En ella se representa la variación temporal de la primera coordenada, desplazamiento horizontal del chasis, en km/h. En ella se muestran 3 tramos interesantes. El primero es el tramo lineal, correspondiente al régimen de revoluciones en el que el par es máximo. Le sigue un transitorio donde la curva tiene una pendiente cada vez menor, resultante del decremento de la amplitud del par al pasar las 4000 rpm del motor, y, finalmente, se estabiliza en la velocidad máxima, unos 160 km/h, donde se compensan las fuerzas externas y la aceleración producida por el par motor.

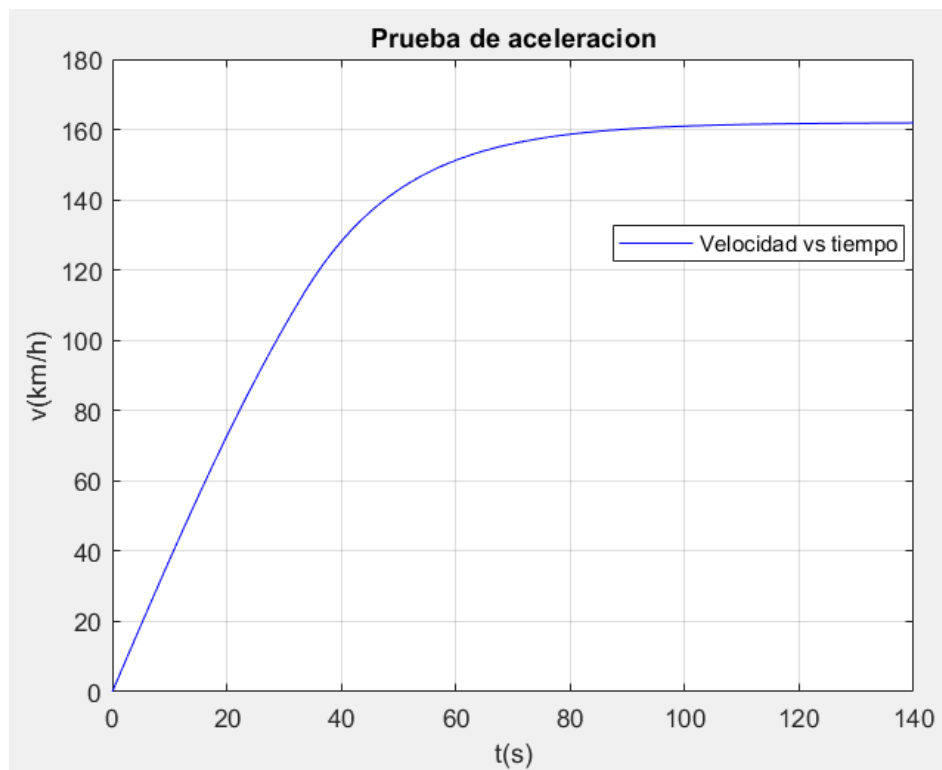


Figura 5.4.- Resultado de la prueba de aceleración

Lo siguiente que interesaría comprobar es cuál sería el resultado de combinar esta aceleración con las irregularidades del terreno, donde, razonando sobre los tramos que se han diferenciado, se esperan obtener transitorios y regímenes permanentes, correspondientes a las aceleraciones y a la estabilización del sistema en su velocidad máxima. Esto ofrecerá interacciones con el terreno cuya frecuencia será variable en un principio y constante al final, lo que permitirá un estudio completo de la influencia del mass damper, dando lugar a conclusiones muy interesantes, como se verá en los capítulos restantes.

5.2.- Irregularidades del terreno

Como se ha adelantado en varias ocasiones en capítulos y subcapítulos anteriores, la fuerza generalizada producida por el terreno tiene como fin representar la interacción del modelo con el terreno. Esta fuerza se convierte en algo muy interesante en el momento en el que se razona un poco sobre sus consecuencias: Un aumento de los desplazamientos máximo y mínimo de los ejes de las ruedas se va a traducir en un aumento de la amplitud de la fuerza que reciben los neumáticos. Si se lleva esto a la práctica, un exceso de fuerza máxima ejercida por el asfalto sobre el neumático conlleva un mayor desgaste, pues el asfalto no deja de ser un material abrasivo, lo cual no interesa bajo ningún concepto, pues esto implica una menor vida útil del neumático, peor agarre, peor tracción, y, por tanto, puede derivar en caída. Esto último es el mismo desenlace que produce una disminución de la fuerza mínima, que se traduce en falta de agarre. Estas situaciones son las que se pretenden evitar mediante la implementación del absorbedor, que reduce la amplitud de las fuerzas que van a recibir los neumáticos (Y, por consiguiente, el resto del prototipo también verá reducidos sus desplazamientos verticales, lo que lleva a un mayor confort del piloto), que en la práctica significa un menor desgaste de los neumáticos debido a la disminución del valor máximo, y evita las pérdidas de tracción derivadas de una fuerza mínima demasiado baja^[4]. En consecuencia, un correcto dimensionamiento del mass damper puede significar un mejor final de carrera y un aumento en la seguridad del piloto, pues podría evitar una caída debida a esta pérdida de contacto entre la rueda y el suelo. Es por este motivo que el mass damper se posiciona en el eje de la rueda delantera.

Una vez entendida la importancia de las irregularidades del terreno y las implicaciones de los desplazamientos que produce sobre el sistema mecánico aquí estudiado, se procede a introducir los perfiles utilizados para las simulaciones. Para ello, se ha diferenciado entre el perfil del asfalto, el cual se va a simular como una onda senoidal de 2 cm de amplitud y 2 cm de longitud de onda, de modo que la frecuencia con la que dicha carretera excitará el sistema dependerá de la propia velocidad del modelo, uniendo de este modo la prueba de aceleración con las irregularidades del asfalto. A pesar de ello, al tener como objetivo ver el efecto del absorbedor y poder sacar conclusiones sobre su correcto dimensionamiento, en las simulaciones también se ha impuesto que la frecuencia de excitación sea constante e igual a un valor elegido. Esto permite ver cuál sería el mejor resultado teórico que se puede obtener, lo que va a permitir acotar los beneficios obtenidos gracias al dispositivo para unos parámetros β y δ concretos, además de poder asemejar esta situación a una situación de velocidad constante, como puede ser un paso por curva o una situación de lluvia que no permita grandes aceleraciones.



Figura 5.5.- Representación del paso de una moto por asfalto

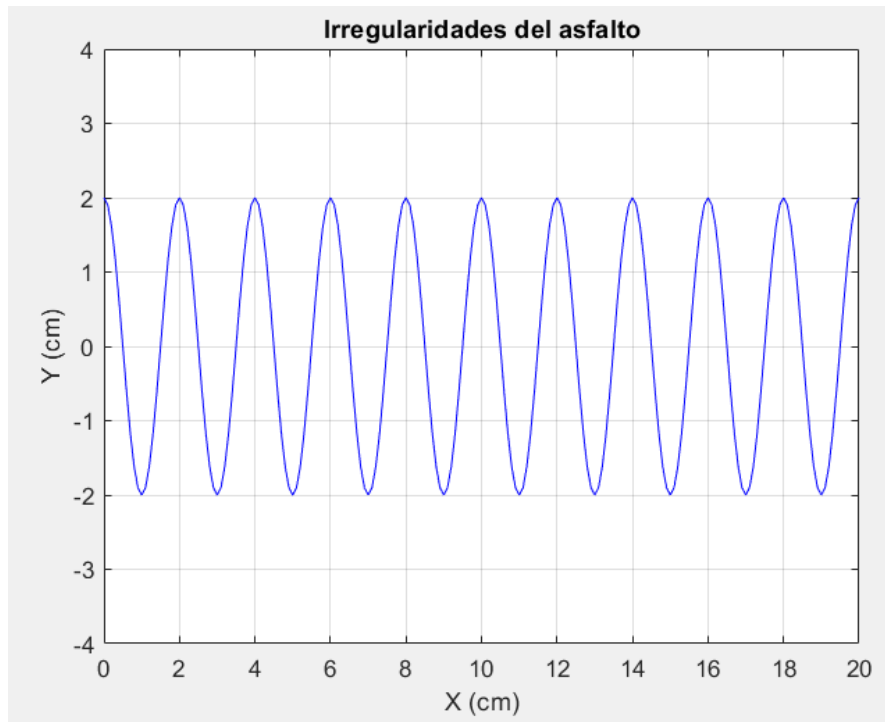


Figura 5.6.- Representación del asfalto mediante una onda senoidal

Por otro lado, la segunda de las simulaciones representa el paso de la moto por encima de un piano. Para ello, se representa esta parte del terreno como un perfil en rampa de 5 cm de amplitud máxima. En este caso, dado que los pilotos apenas pisan este tramo durante unas centésimas, las simulaciones se han desarrollado para un terreno de excitaciones periódicas y de frecuencia constante, pues lo único que interesa es ver cómo afecta el transitorio que produce el escalón del final del perfil de la rampa al modelo. Las ocasiones en las que se pisan los pianos suelen ser a las salidas de las curvas, aunque también hay curvas rápidas como la del circuito de Assen mostrada en la figura 5.8, por ello es interesante estudiar los efectos de este perfil a altas y bajas frecuencias, como se hará en el capítulo 7. A continuación se muestran una situación de frenada encima del piano (Figura 5.7) y un paso por encima del piano en una curva moderadamente rápida (Figura 5.8) con las que se pretende justificar sendos escenarios utilizados para las simulaciones.



Figura 5.7.- Situación de paso por encima de un piano a baja velocidad

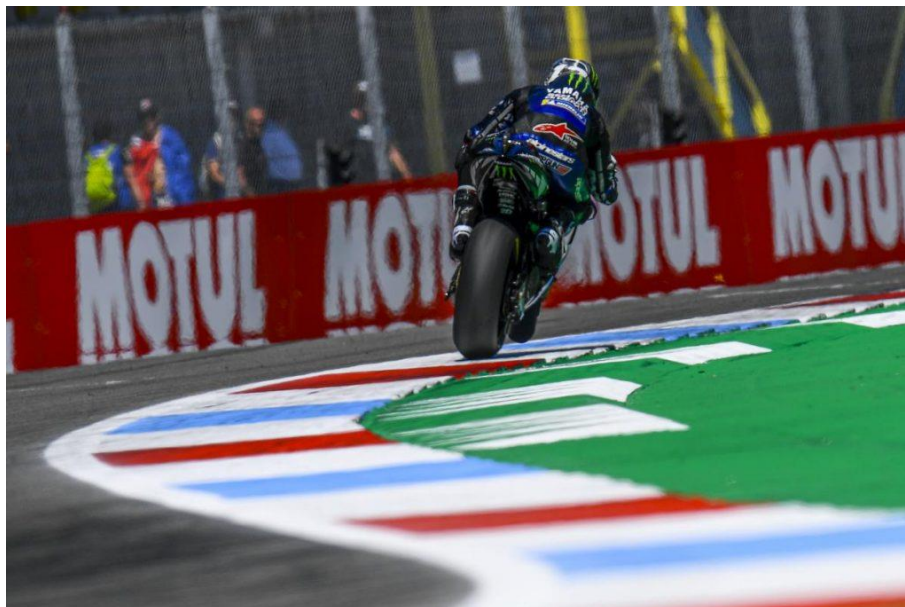


Figura 5.8.- Paso por encima de un piano a velocidad moderada o alta.

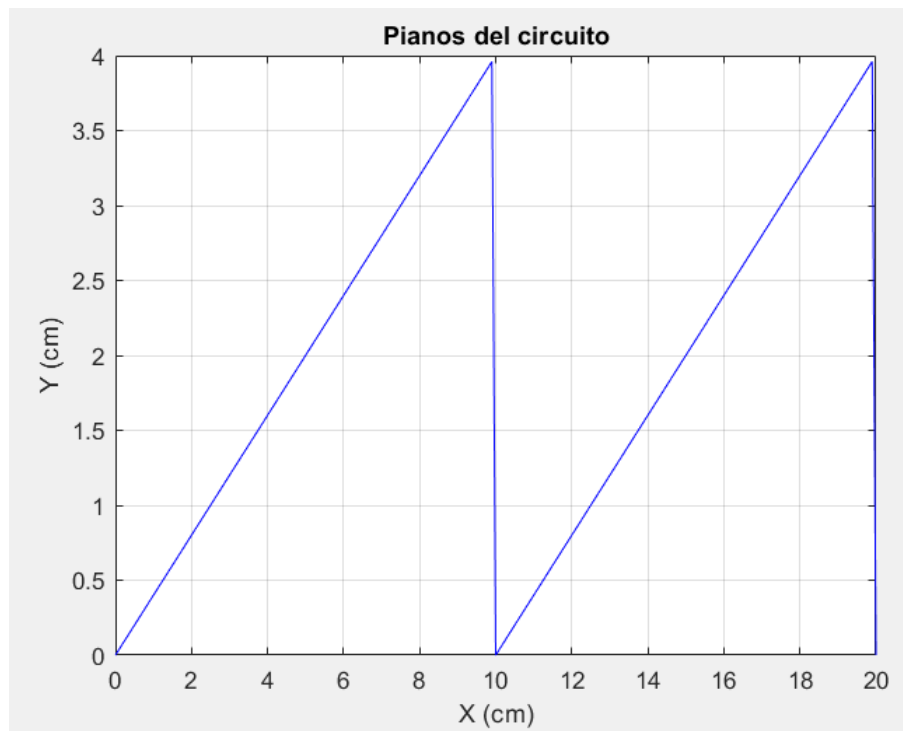


Figura 5.9.- Imagen de una onda triangular que representa el perfil del piano

Capítulo 6.- Análisis del efecto del absorbedor

Alcanzado este punto, echando la vista atrás, a lo largo de este proyecto se ha introducido el modelo mecánico que pretende representar una moto eléctrica real de competición, se ha calculado su posición de equilibrio, se ha empezado a profundizar en el funcionamiento del mass damper y de cómo lograr mejores resultados con él, se ha visto cómo se implementa en el modelo inicialmente nombrado y se han presentado los escenarios en los que se pretende demostrar su funcionamiento. Por tanto, finalmente, quedaría comprobar si las conclusiones obtenidas de la aplicación del absorbedor a un sistema simple se corresponden con las conclusiones que se obtendrían al implantar este dispositivo en el modelo a estudiar, y que dichas previsiones sean válidas al enfrentar al modelo a los escenarios reales propuestos en el capítulo 5. Para ello, a lo largo de este capítulo se van a estudiar los efectos que causa la variación de los parámetros que condicionan el efecto del absorbedor en el modelo linealizado, se obtendrán las conclusiones y se estudiará en el capítulo 7 su validez en el modelo no lineal que se presentó inicialmente.

Como recordatorio, la finalidad de estudiar estos efectos en el sistema lineal es utilizar unas ecuaciones de movimiento cuyas matrices de masa, rigidez y amortiguamiento no dependan de posiciones o velocidades, de modo que se pueda ver directamente el efecto de las frecuencias de excitación sobre las amplitudes de las respuestas del sistema mecánico a estudiar. Esta idea es útil, dado que deja como único parámetro la frecuencia, que es, en definitiva, lo que va a definir el comportamiento del absorbedor, y, por tanto, de todo el conjunto. Evidentemente, esto plantea también una serie de limitaciones, pues cuando se linealizó el sistema en el segundo capítulo, se advirtió de la pérdida de información que esto conllevaba. A pesar de ello, se vio que la diferencia entre las frecuencias naturales era reducida (Salvo en la tercera), lo que lleva a la obtención de unos modos de vibración similares, por lo que es esperable que las respuestas que se van a obtener también lo sean. El fin de este capítulo es, al igual que se hizo en el tercero, añadir el absorbedor al sistema completo (Véase el capítulo 4) y obtener su función de respuesta en frecuencia, de modo que, variando tanto la frecuencia natural del absorbedor como su masa (Por separado), se puedan obtener una serie de conclusiones sobre qué valores de estos parámetros ofrecen un mejor comportamiento, a priori, ante excitaciones externas, o qué limitaciones presentan los mismos. Esta casuística se verá comprobada en el próximo capítulo, donde se dará validez a dichas conclusiones.

6.1.- Efecto de la frecuencia

Como se acaba de introducir, el estudio se va a realizar a partir del sistema lineal, por lo que las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez van a ser constantes. Esto va a permitir relacionar las amplitudes de la respuesta del sistema con la frecuencia de excitación de un modo directo:

$$X(\omega) = H(\omega)q$$

$$H(\omega) = ((j\omega)^2 M + j\omega C + K)^{-1}$$

Donde j denota la unidad imaginaria ($j = \sqrt{-1}$), y $H(\omega)$ es la denominada “Función de respuesta en frecuencia”, que es de lo que depende la respuesta. Lo interesante de este conjunto de ecuaciones, es que, mientras que en el sistema original esta función de respuesta en frecuencia depende únicamente de la propia frecuencia de excitación, la función del sistema con absorbedor tiene una dependencia adicional de la masa y rigidez del sólido añadido, los cuales

no son fijos, ya que es su efecto lo que se pretende cuantificar. Para ello, en primer lugar, se fija una relación de masas, $\beta = 0.034$, y se define una frecuencia natural para el absorbedor, por ejemplo, $\omega_{n7} = 180 \text{ rad/s}$.

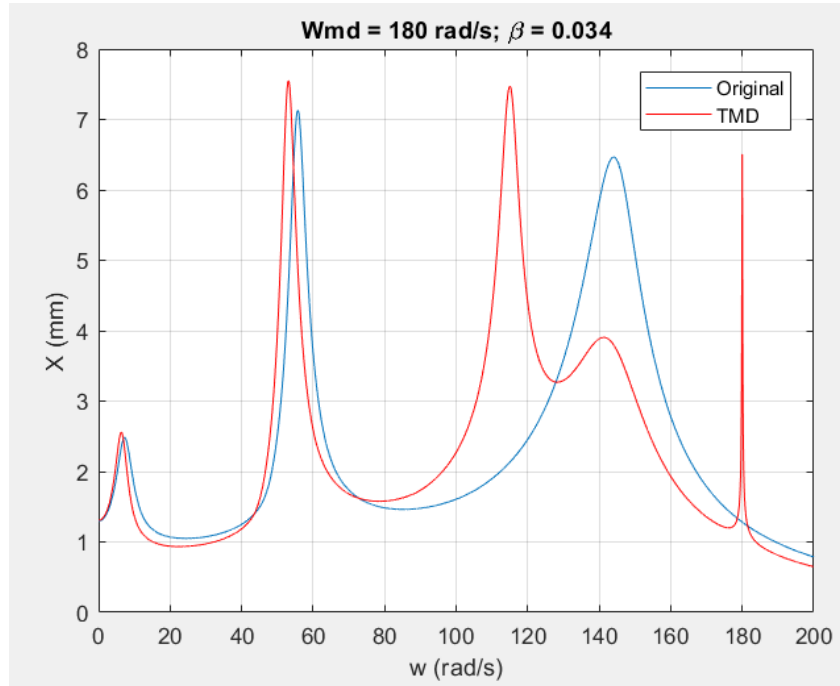


Figura 6.1.- Efecto de la frecuencia del absorbedor sobre la respuesta en frecuencia

En el tercer capítulo, las conclusiones del efecto de la frecuencia del absorbedor eran que desplazaba la frecuencia natural del sistema original y que, cuanto mayor fuera la frecuencia del mass damper, mayor era el rango sobre el que influía (De ahí que la frecuencia escogida sea mayor que las del sistema), que en las frecuencias cercanas a la sintonizada las amplitudes serían menores y mayores en las más distantes y que se creaba una frecuencia natural adicional. Efectivamente, en la figura 6.1 se aprecian todas las conclusiones obtenidas en el capítulo 3 sobre el efecto de añadir el absorbedor sobre la función de respuesta en frecuencia. Por tanto, se dan por válidas, a priori, las mismas conclusiones que las que se obtuvieron anteriormente sobre el efecto de la frecuencia natural del absorbedor (Cuanto mayor sea, hasta cierto punto, más beneficios parece aportar). Además, teniendo en cuenta las velocidades a las que compiten las motos, y dado que se ha relacionado la frecuencia de excitación con la velocidad de la misma, parece evidente que el sistema en una situación real trabajará más tiempo a altas que a bajas frecuencias, de hecho, a frecuencias mucho mayores que las mostradas en la figura 6.1, por lo que se recalca el beneficio de sintonizar el dispositivo a una frecuencia mayor que las del sistema original.

6.2.- Efecto de la masa

Tras conocer los efectos de la frecuencia sintonizada, se procede a hacer un barrido de la masa para una frecuencia natural del absorbedor constante e igual a la elegida en el subcapítulo 6.1 para dar validez a las conclusiones que se habían obtenido en el sistema simple de un grado de libertad. Para ello, se calcula la función de respuesta en frecuencia para cada valor de la masa del dispositivo, y se exponen todas en la figura 6.2:

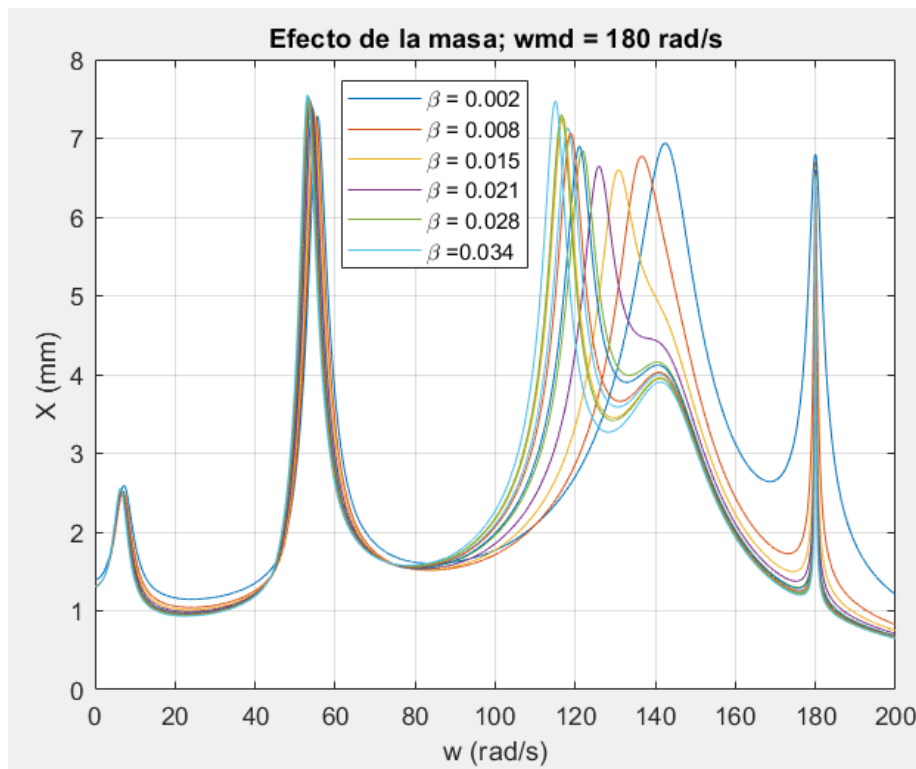


Figura 6.2.- Efecto de la masa del absorbidor sobre la función de respuesta en frecuencia del sistema

En el estudio del sistema de un grado de libertad, se había predicho que un aumento de la masa relativa implicaba, por un lado, una disminución de las amplitudes de la respuesta para frecuencias igual o próximas a la sintonizada, y, por otro lado, un aumento en el rango sobre el que las amplitudes eran menores. Lejos de la frecuencia del dispositivo, las amplitudes eran mayores. De nuevo, las conclusiones que se habían obtenido en el capítulo 3 sobre el efecto de la masa, se vuelven a ver reflejadas en este sistema, lo cual da validez al estudio realizado anteriormente. Es interesante notar que la diferencia de amplitudes para una misma frecuencia cuando la relación entre masas es pequeña resulta bastante grande, mientras que si se sigue aumentando dicha relación la diferencia deja de ser tan notoria (Véanse las amplitudes para unos 170 rad/s). Sin embargo, seguir aumentando el parámetro β tiene como efecto positivo el abanico de frecuencias para el que su influencia ofrece un mejor resultado. Por tanto, lo que habría que buscar con este parámetro es un equilibrio entre el peso que se quiere añadir y el beneficio que se quiere obtener, pues se puede escoger una masa muy grande para el mass damper, lo cual a nivel numérico puede ofrecer unos resultados extraordinarios, pero no ser útil a un nivel práctico, pues al fin y al cabo se está añadiendo una masa vibratoria en el eje de la rueda delantera de una moto. Por otro lado, el limitar las vibraciones del tren delantero puede llevar a que el piloto obtenga una falta de información sobre sus acciones. Es decir, el piloto necesita “sentir” el terreno para poder notar defectos en su conducción, por ejemplo, por ello, tampoco es excesivamente conveniente eliminar estas vibraciones. En cualquier caso, el propósito de este proyecto es demostrar que se puede conseguir esta atenuación, por lo que no se va a discutir cuál debe ser el límite de peso a añadir para encontrar éste equilibrio, si no cuál debe ser la relación entre masas para conseguir un mayor efecto.

6.3.- Conclusiones

Para dar por finalizado este capítulo, se recogen a continuación cuáles son las conclusiones sobre los estudios realizados, y cuáles parecen ser los valores de los parámetros más favorables para la eliminación de vibraciones verticales de las ruedas de la moto:

En cuanto a la frecuencia a la que se sintoniza el mass damper, la influencia será notoria en las amplitudes de la respuesta para valores similares o iguales a dicha frecuencia, de modo que va a determinar el rango de valores en torno al que las amplitudes se van a atenuar a priori, Por otro lado, un mayor valor de dicha frecuencia lleva consigo un aumento de dicho rango sobre el que se obtienen mejores resultados, además de amplitudes menores fuera de él en comparación con otras frecuencias naturales menores. Por tanto, la conclusión en cuanto a este aspecto es que una mayor frecuencia natural del absorbedor parece ofrecer mayores beneficios y mejores resultados.

En relación con la masa, la conclusión es que cuanto mayor sea la relación entre la masa del absorbedor y la del sistema al que se acopla, más se atenúan las vibraciones y para un rango mayor de ellas, siendo mayor el efecto para la frecuencia a la que se ha sintonizado el absorbedor. Por tanto, lo que interesa es que esta relación sea lo más grande posible, aunque debe notarse que la diferencia de comportamientos para una misma frecuencia decrece conforme aumenta esta relación, por lo que cada vez hace falta más masa para obtener mejores resultados.

Parámetro	Acción	Consecuencia
δ	\uparrow	\uparrow Frecuencia natural adicional \uparrow Desplazamiento de las otras frecuencias \uparrow Rango de frecuencias sobre el que influye el absorbedor
β	\uparrow	\downarrow Amplitudes en frecuencias próximas a las sintonizadas \uparrow Rango de frecuencias para el que se atenúan las vibraciones

Tabla 6.1.- Conclusiones sobre los efectos de los parámetros del mass damper

Capítulo 7.- Resultados de las simulaciones

Obtenidas las conclusiones teóricas sobre cómo obtener buenos resultados implementando el absorbedor al sistema en el sistema linealizado, solamente queda poner a prueba el modelo con y sin mass damper y ver si, efectivamente, las conclusiones son válidas en el modelo no lineal y cuánto se pueden llegar a atenuar las vibraciones en ambas suspensiones o en el movimiento vertical del chasis, de cara a asegurar tracción o garantizar cierto confort en el piloto respectivamente.

En las siguientes figuras se muestra la respuesta del sistema ante la combinación de la prueba de aceleración y distintas excitaciones del terreno, que es realmente lo interesante del estudio, pues es lo que va a definir la dinámica vertical de la moto. Las tres primeras figuras mostradas en este apartado corresponden a una simulación con los siguientes parámetros:

$$\omega_{md} = 180 \text{ rad/s}; \quad \beta = 0.01; \quad \omega_{excit} = 30 \text{ rad/s}$$

El fin de esta primera simulación es mostrar cómo es la respuesta de los tres grados de libertad que interesa mostrar, por ello se presenta un caso en el que la relación entre masas absorbedor-sistema es pequeña, y en el que la frecuencia natural del absorbedor no está sintonizada con la de excitación, de modo que no es una situación en la que se aprecien particulares mejorías en la respuesta. Es fácil ver que el desplazamiento vertical del chasis está estrechamente relacionado con la compresión de la suspensión delantera, que, además, es donde se ha colocado el mass damper para las distintas pruebas. Por otro lado, las amplitudes de las vibraciones de la suspensión delantera son, aparentemente, mayores que las de la suspensión trasera. Por ello, en los siguientes subapartados se van a mostrar únicamente los resultados obtenidos en el tren delantero, pues se entiende que serán similares los obtenidos en el chasis, mientras que se compararán, finalmente, con los obtenidos cuando el mass damper se posiciona en el basculante.

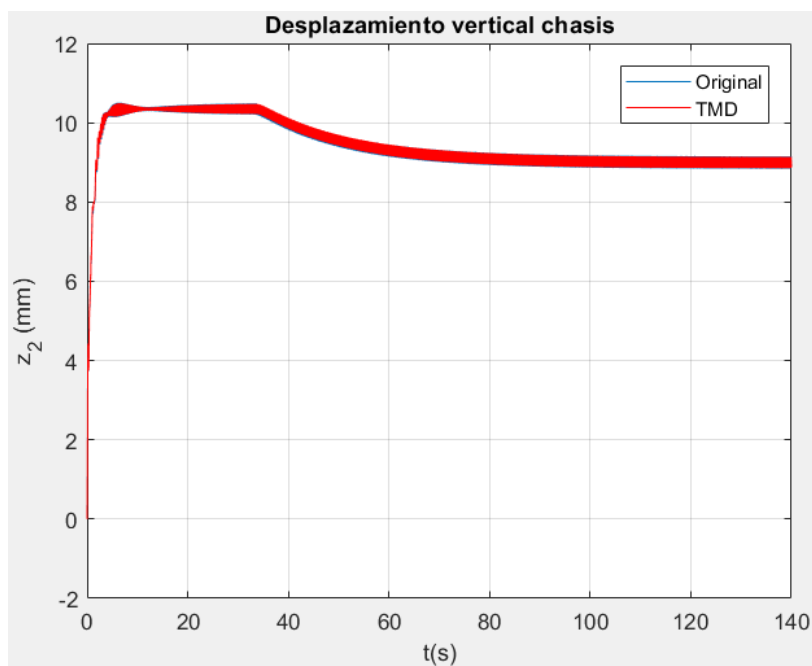


Figura 7.1.- Desplazamiento vertical del chasis para $\omega_{md}=180 \text{ rad/s}$; $\beta = 0.01$; $\omega_{excit}=30 \text{ rad/s}$

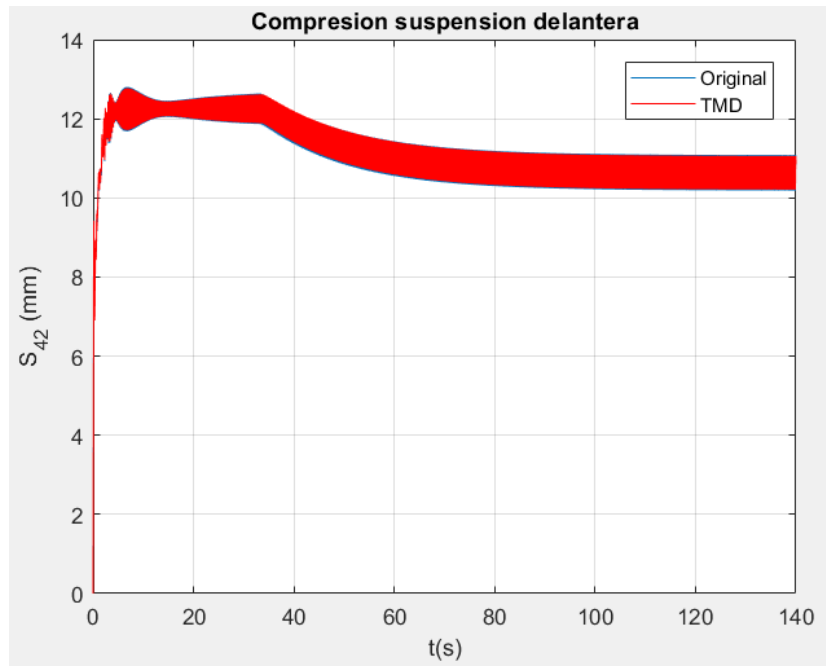


Figura 7.2.- Desplazamiento de la suspensión delantera para $\omega_{md} = 180$ rad/s; $\beta = 0.01$; $\omega_{excit}=30$ rad/s

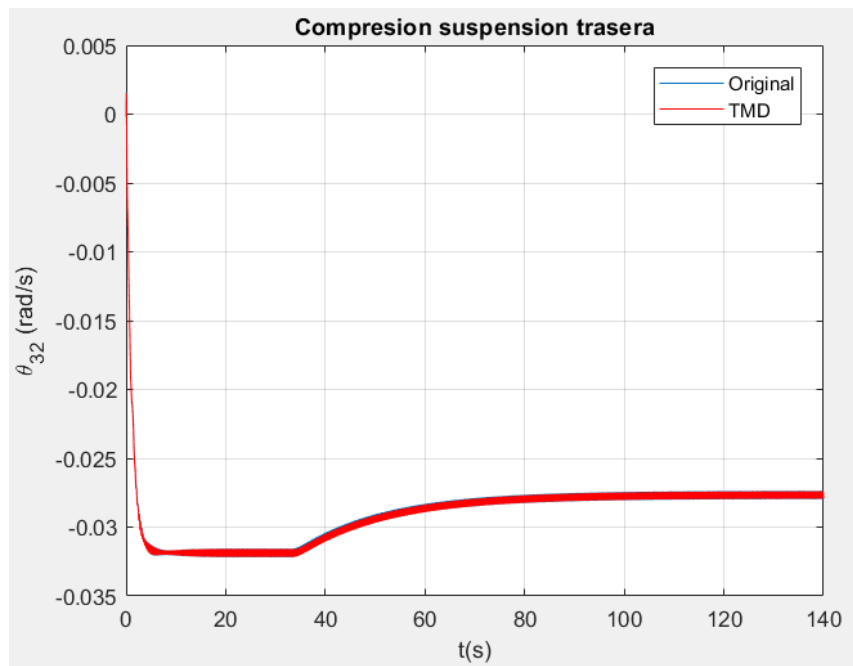


Figura 7.3.- Desplazamiento de la suspensión trasera para $\omega_{md}=180$ rad/s; $\beta = 0.01$; $\omega_{excit}=30$ rad/s

7.1.- Excitaciones senoidales en régimen permanente

Como ya se había introducido, se pretenden analizar situaciones en las que la frecuencia de excitación sea constante de cara a comprobar las conclusiones obtenidas en el modelo linealizado. De este modo, y dado que el absorbedor tiene una única frecuencia natural, esto va a permitir visualizar el máximo efecto que puede ofrecer el mass damper sobre la moto, el cual no se espera obtener para una situación de frecuencia de excitación variable, por los motivos ya expuestos.

7.1.1.- Respuesta ante excitaciones senoidales de frecuencia constante

A continuación, se somete el sistema a una serie de excitaciones senoidales de frecuencias constantes. Se variarán tanto la frecuencia de excitación como la frecuencia natural del absorbedor, de cara a verificar la influencia de sintonizar el absorbedor, así como la relación entre masas, con el fin de comprobar su influencia sobre la amplitud de las vibraciones y el desplazamiento de las frecuencias naturales cuando se añade el absorbedor.

7.1.1.1.- Excitaciones con absorbedor no sintonizado

En primer lugar, se muestra la respuesta para la situación en la que la relación entre masas es baja, así como la frecuencia de excitación, y el mass damper no se sintoniza con dicha frecuencia:

$$\beta = 0.01; \quad \omega_{excit} = 30 \text{ rad/s}; \quad \omega_{md} = 180 \text{ rad/s}$$

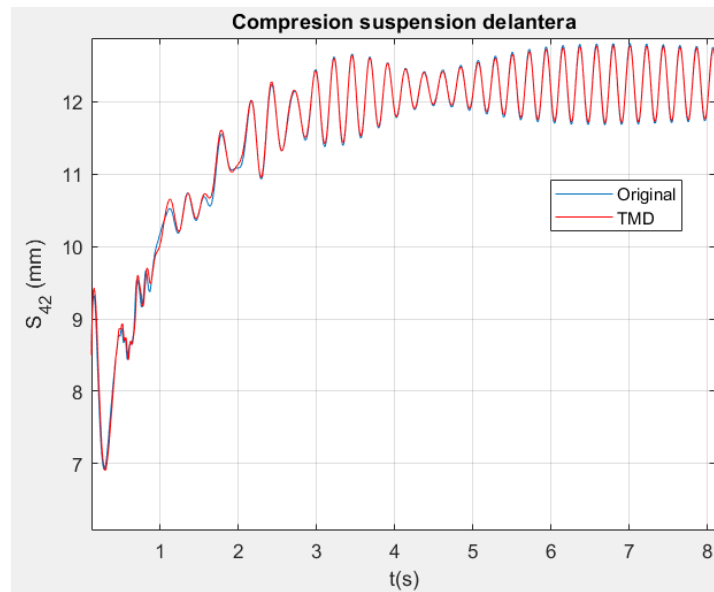


Figura 7.4.- Régimen transitorio. Situación: $\beta = 0.01$; $\omega_{excit} = 30 \text{ rad/s}$; $\omega_{md} = 180 \text{ rad/s}$

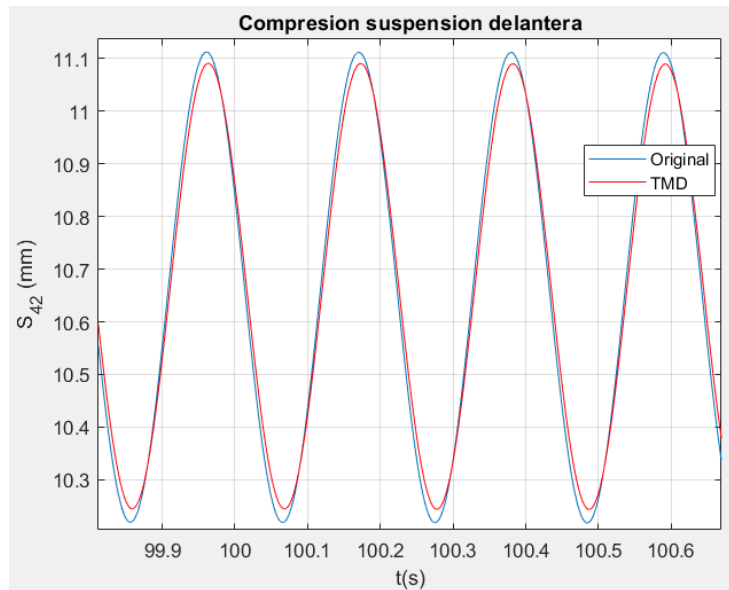


Figura 7.5.- Régimen permanente. Situación: $\beta = 0.01$; $\omega_{excit} = 30 \text{ rad/s}$; $\omega_{md} = 180 \text{ rad/s}$

Como se había introducido, en esta situación del absorbedor apenas muestra una mejora que a efectos prácticos resultaría imperceptible, pero, como se concluyó en el apartado anterior, aunque el absorbedor no esté sintonizado, una frecuencia natural más alta permitiría conseguir amplitudes, en este caso, ligeramente menores en frecuencias de excitación lejanas a las del absorbedor a pesar de la pequeña masa añadida (1% del total).

7.1.1.2.- Excitaciones con absorbedor sintonizado

Visto que un absorbedor no sintonizado y con una masa pequeña apenas supone una diferencia en la respuesta, lo siguiente que se quiere comprobar es cuánto puede afectar el hecho de sintonizar el absorbedor con la excitación, pues es su funcionamiento ideal. En las siguientes figuras se muestra este caso sin variar la masa del caso anterior, donde ya se nota una diferencia, pues mientras que añadiendo una masa del 1% y no sintonizándolo no se obtiene ninguna mejoría, cambiando únicamente la frecuencia de excitación e igualándola a la del absorbedor, se consigue atenuar las vibraciones un **32.60%** en el régimen permanente:

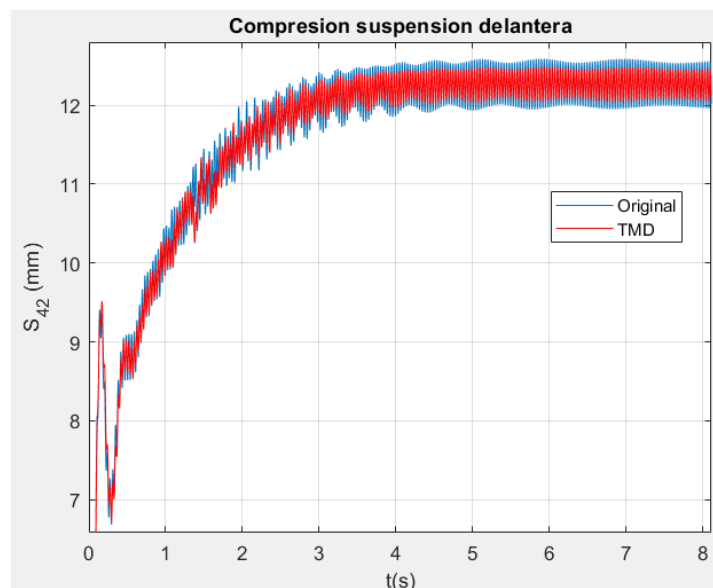


Figura 7.6.- Régimen transitorio. Situación: $\beta = 0.01$; $\omega_{excit} = 180 \text{ rad/s}$; $\omega_{md} = 180 \text{ rad/s}$

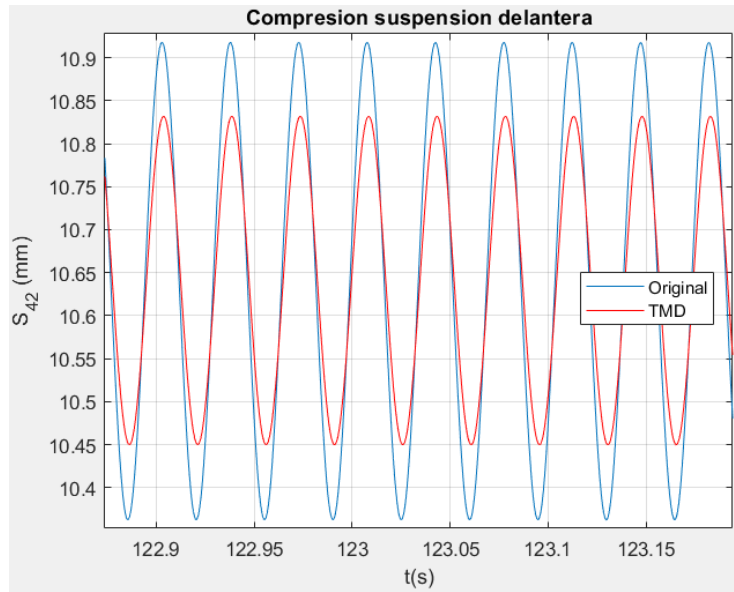


Figura 7.7.- Régimen permanente. Situación: $\beta = 0.01$; $\omega_{excit} = 180 \text{ rad/s}$; $\omega_{md} = 180 \text{ rad/s}$

7.1.1.3.- Influencia de la masa

Comprobado el efecto de sintonizar el mass damper, queda verificar el beneficio que supone aumentar su masa. Si en el anterior caso con una masa del 1% de la moto se conseguía atenuar las vibraciones un 32.60%, ahora se consigue atenuar un **80.77%** añadiendo una masa del 9%. Esto confirma varias de las premisas que se habían obtenido en el apartado 6, como que se consiguen menores amplitudes al añadir esta masa libre, como era de esperar, y que, añadiendo poca masa ya se consigue atenuar las vibraciones 1/3 de las originales, mientras que para llegar al 80% hay que multiplicar por 9 la masa añadida. Evidentemente, se podría eliminar la vibración, pero a costa de seguir aumentando la masa, donde estas atenuaciones son cada vez más costosas (Hablando de masa añadida). Esto a nivel de estudio solo demuestra que el mass damper funciona, pero no se debe olvidar que la finalidad es obtener mejores comportamientos en una moto de competición, donde cada gramo añadido cuenta, con lo que hay que buscar un equilibrio entre la masa añadida, el beneficio que aporta y lo desfavorable que resulta a nivel de velocidad el añadir masa a la moto. En cualquier caso, el fin de este proyecto es demostrar que el añadir un mass damper puede reducir las amplitudes de las vibraciones, que es lo que se consigue en las siguientes ilustraciones.

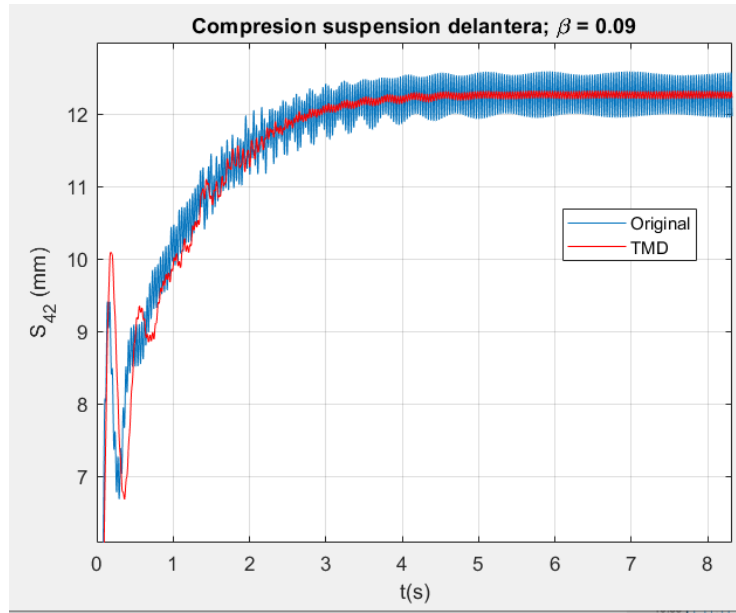


Figura 7.8.- Régimen transitorio. Situación: $\beta = 0.09$; $\omega_{excit} = 180$ rad/s; $\omega_{md} = 180$ rad/s

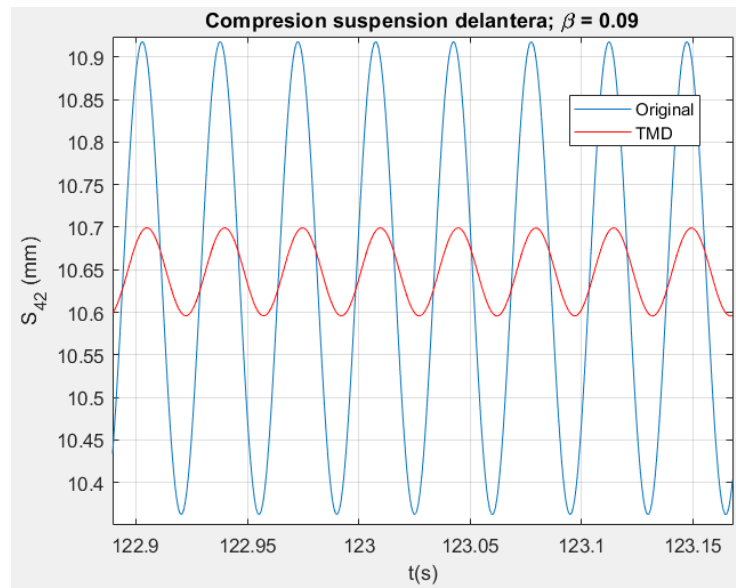


Figura 7.9.- Régimen permanente. Situación: $\beta = 0.09$; $\omega_{excit} = 180$ rad/s; $\omega_{md} = 180$ rad/s

7.1.1.4.- Excitaciones a frecuencia natural

En el apartado 3 se presentó el mass damper y se comprobó que se podía anular la vibración de un sistema de un grado de libertad sintonizando el absorbedor con su frecuencia natural. Con lo cual, sería esperable viendo, además, las gráficas presentadas en el capítulo 6, que los mejores resultados se obtengan de este modo. Por ello, se muestra a continuación, el resultado de sintonizar tanto la frecuencia de excitación como la del absorbedor con la frecuencia natural más alta del sistema original, manteniendo la relación entre masas en un 0.09. El resultado es que se atenúa la amplitud de la vibración un **90%**.

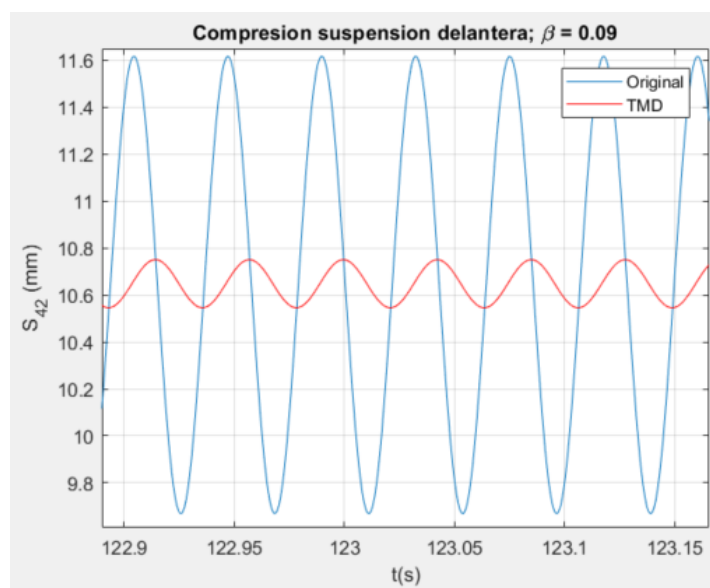


Figura 7.10.- Régimen permanente. Situación: $\beta = 0.09$; $\omega_{excit} = 147.2$ rad/s; $\omega_{md} = 147.2$ rad/s

β	ω_{excit}	ω_{md}	Atenuación
0.01	30	180	0%
0.01	180	180	30.6%
0.09	180	180	80.77%
0.09	147.2	147.2	90%

Tabla 7.1.- Resumen de atenuaciones en función de los parámetros del absorbedor

7.1.2.- Respuesta ante excitaciones senoidales de frecuencia variable

El siguiente paso, es comprobar qué pasa cuando la frecuencia de excitación es variable, que sería el caso real. En este caso se supone un perfil senoidal periódico, como se mostró en el capítulo 5, que se superpone a la prueba de aceleración desde parado. El resultado es que, al ser el terreno senoidal y la velocidad del prototipo creciente, lo que se obtiene es una frecuencia de excitación dependiente de la velocidad y de la longitud de onda, pues la frecuencia de excitación instantánea se puede expresar como:

$$\omega = \frac{2\pi v(t)}{\lambda} \text{ rad/s}$$

Para la simulación, se han mantenido la relación entre masas y la frecuencia del absorbedor (180 rad/s). De este modo, se pueden observar varias curiosidades que ya se venían advirtiendo:

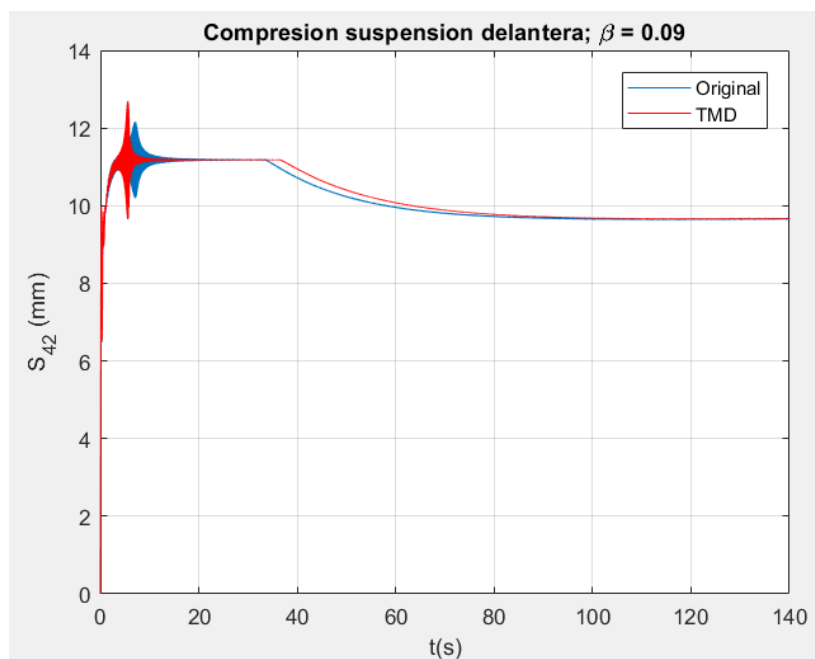


Figura 7.11.- Respuesta ante ω_{excit} variable . Situación: $\beta = 0.09$; $\omega_{md} = 180$ rad/s

En primer lugar, lo primero que se advierte a bajas frecuencias, es un tramo temporal en el que las amplitudes del sistema con absorbedor son mayores que las del sistema original. Esto se debe al desplazamiento que crea la implementación del absorbedor en las frecuencias naturales del sistema original, que ella se había predicho en el capítulo 3. Por otro lado, comparando con el mismo pico correspondiente al sistema original (Véase la figura 7.12), son mayores las amplitudes del modelo con mass damper. Esto también se había deducido al estudiar el efecto de la masa del absorbedor, ya que cuanto mayor fueran su frecuencia y su masa, más se desplazarían el resto de las frecuencias naturales y mayores serían sus amplitudes, como es el caso. Además, se evidencia un desacompañamiento de las gráficas debido a una aceleración más lenta del segundo modelo por tener una mayor masa en conjunto, que era uno de los problemas que se presentaban en el anterior subcapítulo.

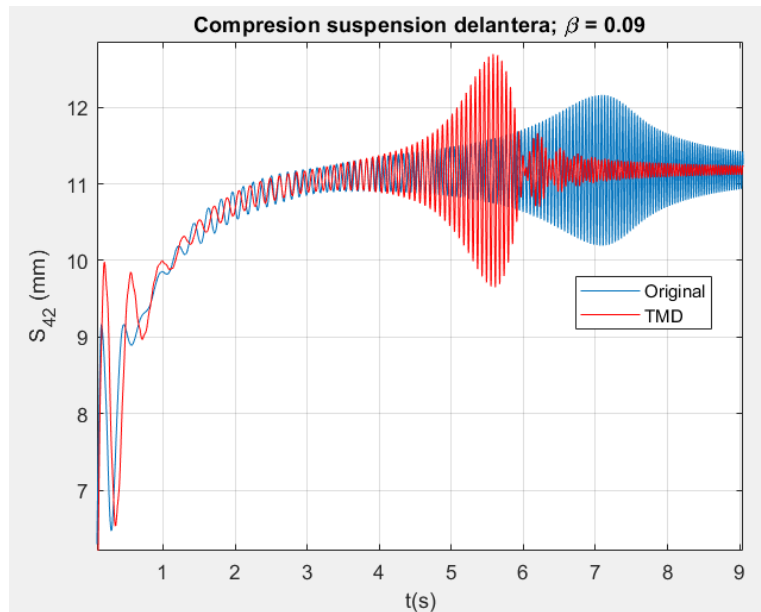


Figura 7.12.- Ampliación de la ventana temporal donde se muestra el desplazamiento de las frecuencias naturales del sistema

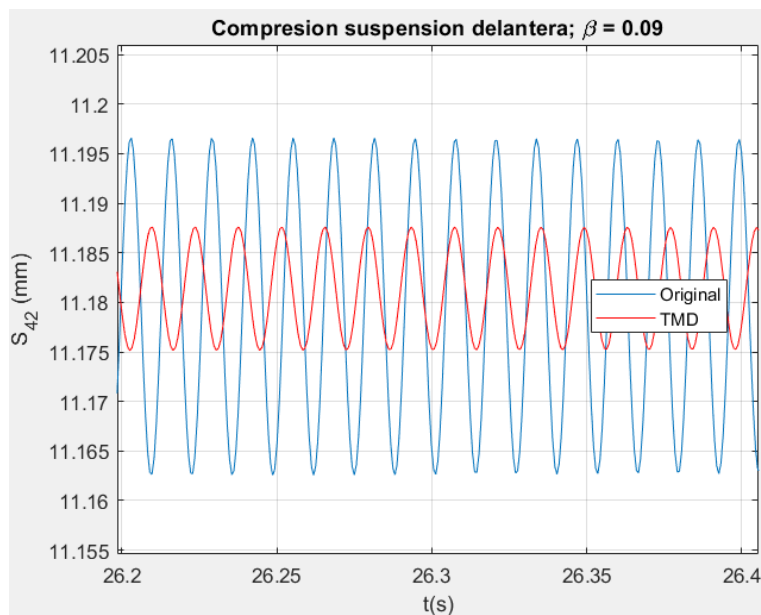


Figura 7.13.- Ampliación de la ventana temporal donde el par es constante y máximo

En las figuras 7.13 y 7.14 se muestran dos tramos. En el primero, el par es constante y máximo, y el prototipo se equilibra en torno a una nueva posición hasta que hay un cambio de par, como pasa en el segundo tramo, ya cuando se alcanza la velocidad máxima del prototipo. La diferencia es que, en el primer caso, la moto sigue acelerando, por lo que la frecuencia de excitación sigue avanzando con la velocidad, por lo que se corresponde con una situación donde esta excitación creada por el terreno posee una frecuencia menor que en el segundo caso, donde dicha frecuencia es máxima. Como resultado, se obtiene que cuando se estabiliza el par, aun siendo a frecuencias más bajas, se consigue una reducción de en torno al **25%**, mientras que a mayores frecuencias esta reducción es de en torno al **72,5%**. Si se tiene en cuenta que, por lo general, las velocidades medias de una moto en carrera suelen ser altas

respecto a su velocidad máxima, se podría deducir que estará la mayor parte del tiempo trabajando con frecuencias de excitación altas a lo largo de la carrera, por lo que es poco probable que la ventana temporal donde se obtenían malos resultados pueda influir negativamente en dicha carrera. Por el contrario, como es más probable que la mayor parte del tiempo se excite la moto a un régimen de frecuencias alto, queda visto que se espera obtener una **reducción de las amplitudes** de vibración de la suspensión delantera de entre el **25% y el 73%** durante prácticamente toda la carrera, aunque, obviamente, estos resultados son únicamente válidos bajo el marco teórico en que se ha desarrollado este proyecto.

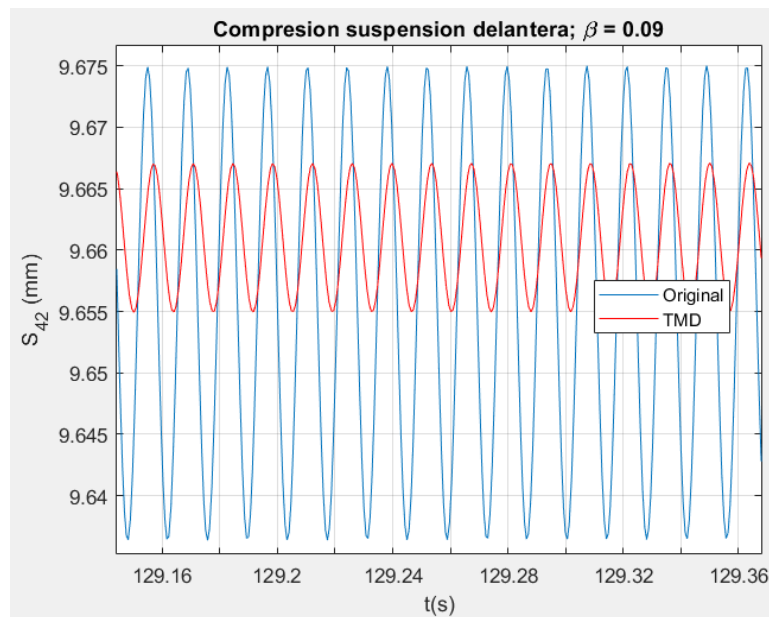


Figura 7.14.- Ampliación de la ventana temporal donde la velocidad es constante y máxima

Régimen de frecuencias	Mejor Comportamiento	Reducción de amplitudes esperada
Bajas	Sin mass damper	Contraproducente
Medias	Con mass damper	25%
Altas	Con mass damper	72,5%

Tabla 7.2.- Comparación de amplitudes esperadas en función cuando ω_{excit} es variable . Situación:
 $\beta = 0.09$; $\omega_{md} = 180$ rad/s

7.2.- Respuesta ante excitaciones en rampa en régimen permanente

En el subcapítulo 7.1 se ha demostrado la eficacia del mass damper ante las distintas excitaciones de perfil senoidal con las que se pretendía simular el asfalto de un circuito. El otro tipo de terreno que se puede encontrar en el circuito son los pianos de los límites de la pista, como se ilustró en el capítulo 5. En este subcapítulo se pretende observar la respuesta al circular la moto por encima de estos pianos que se suponen con perfil de sierra y frecuencia constante, con el fin de ver cómo influye la implementación del mass damper ante los transitorios que este tipo de perfil genera. A su vez, se va a simular este mismo caso para distintas frecuencias de excitación, que se asemejarán a distintas situaciones de paso por encima de ellos, a velocidades bajas o altas.

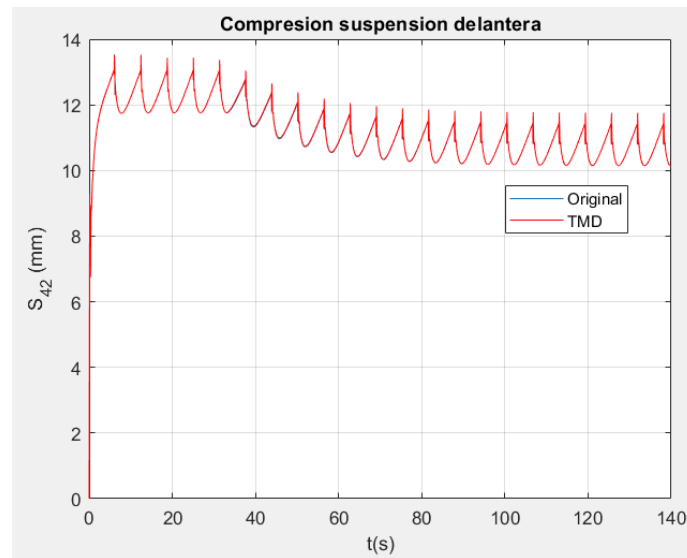


Figura 7.14.- Desplazamiento de la suspensión delantera ante una excitación en rampa. $\beta = 0.01$; $\omega = 3 \text{ rad/s}$; $\omega_{md} = 3 \text{ rad/s}$

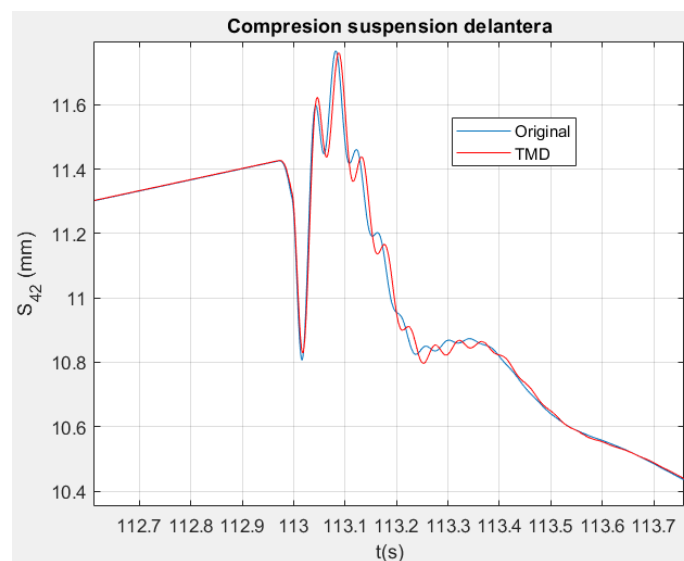


Figura 7.15.- Ampliación de la figura 7.14

7.2.1.- Efecto de la masa en la respuesta

Al igual que se ha hecho con los casos anteriores, se comienza viendo cómo afecta la masa en estos casos. Comparando las dos siguientes figuras con las dos anteriores, se observa cómo, añadiendo masa, de nuevo se reducen los mayores picos de la vibración, pero en el resto de instantes se generan mayores amplitudes. Por tanto, en el caso en que la frecuencia de excitación es baja, el añadir masa no supone una mejoría tan interesante.

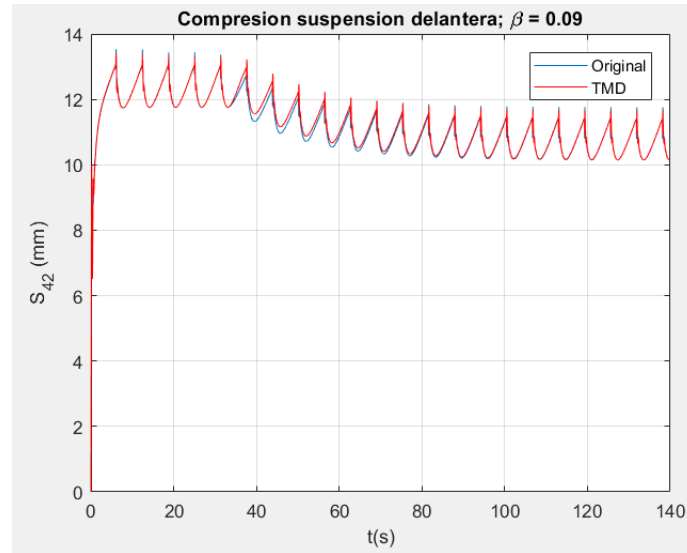


Figura 7.16.- Desplazamiento de la suspensión delantera ante una excitación en rampa. $\beta = 0.09$; $\omega = 3$ rad/s; $\omega_{md} = 3$ rad/s

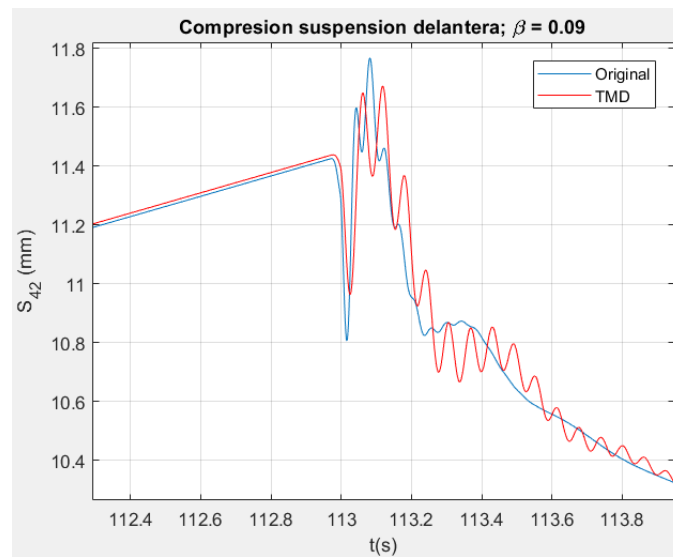


Figura 7.17.- Ampliación de la figura 7.16

7.2.2.- Efecto de la frecuencia de excitación

Manteniendo la relación entre masas en 0.09, que es el caso para el que mejores resultados se han obtenidos, se varía ahora la frecuencia de excitación, pasando de 3 rad/s a 30 y a 180 rad/s, estando el absorbedor sintonizado en todos los casos.

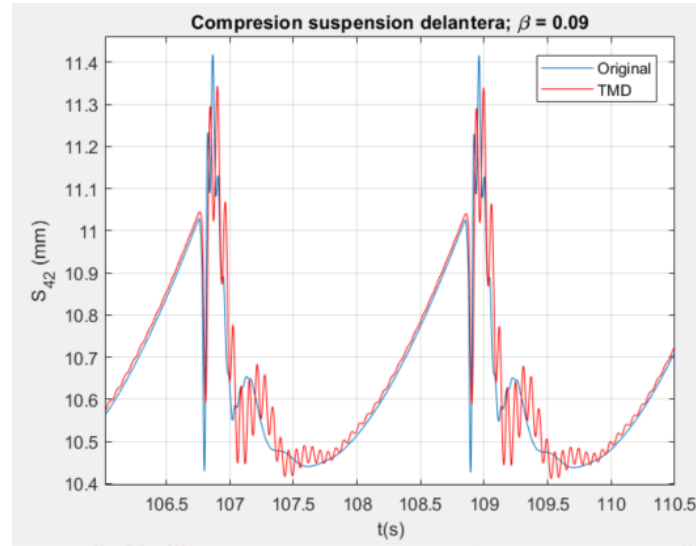


Figura 7.18.- Desplazamiento de la suspensión delantera ante una excitación en rampa. $\beta = 0.09$; $\omega = 3 \text{ rad/s}$; $\omega_{md} = 3 \text{ rad/s}$

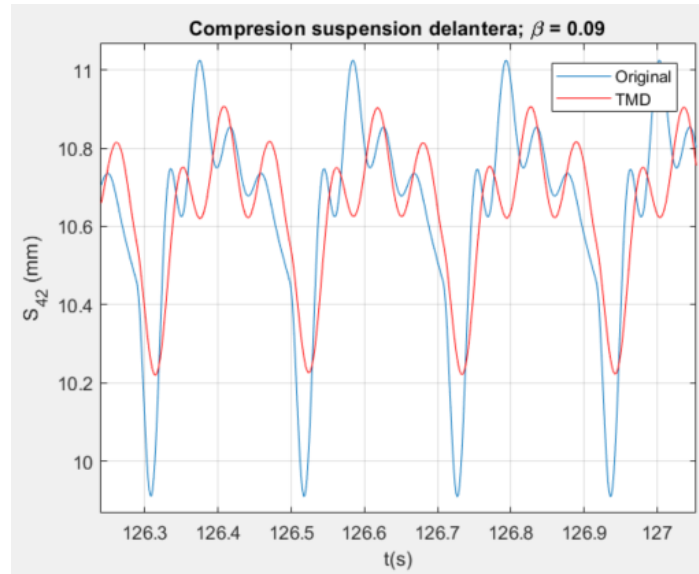


Figura 7.19.- Desplazamiento de la suspensión delantera ante una excitación en rampa. $\beta = 0.09$; $\omega = 30 \text{ rad/s}$; $\omega_{md} = 30 \text{ rad/s}$

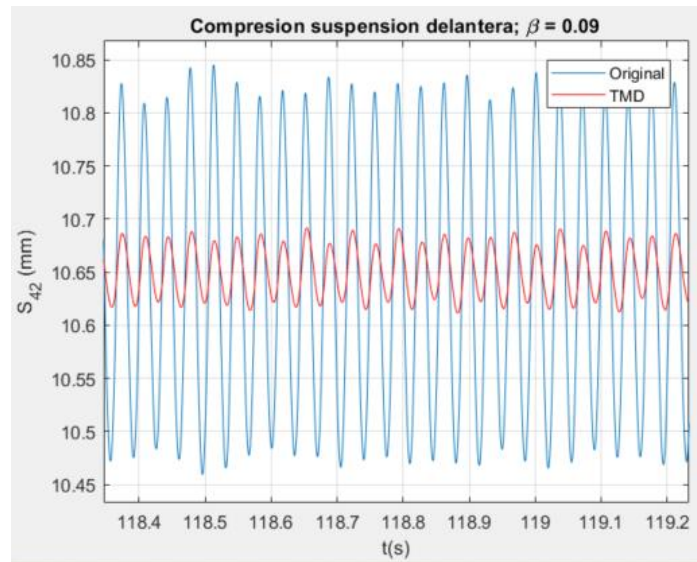


Figura 7.20.- Desplazamiento de la suspensión delantera ante una excitación en rampa. $\beta = 0.09$;
 $\omega = 180 \text{ rad/s}$; $\omega_{md} = 180 \text{ rad/s}$

Al igual que en el caso anterior, el caso más favorable es aquel en el que la frecuencia de excitación es más alta. De hecho, si la frecuencia se aumenta, la excitación se asemeja cada vez más a una onda senoidal. Se concluye entonces, que el mass damper es también favorable cuando la moto pasa por encima del plano, pues, como se dijo en el anterior subcapítulo, las velocidades suelen ser medias o altas en estas situaciones, ya que se dan al salir de las curvas en su mayoría, en plena aceleración.

7.3.- Influencia del posicionamiento del absorbedor

7.3.1.- Comparación de resultados obtenidos con absorbedor en basculante

Para finalizar este estudio, resulta interesante comparar cómo influye el lugar de la moto en el que se coloca el mass damper. Es sabido que la gran mayoría de los equipos que lo usan lo llevan colocado en la suspensión delantera, de ahí que haya sido la posición de estudio a lo largo de los capítulos anteriores, pero hay equipos que también lo llevan en el basculante, como se muestra en la figura 7.21. El objetivo restante es, pues, comprobar el efecto del absorbedor en esta posición con los parámetros elegidos como óptimos en los anteriores subcapítulos.



Figura 7.21.- Moto del mundial de Moto2 con mass damper en el basculante

En las siguientes 3 figuras, se presenta la misma prueba de aceleración anterior, donde las imágenes de la izquierda se corresponden con la situación en la que el mass damper va implementado en la suspensión delantera, mientras que las de la derecha llevan el mass damper en el basculante. En ambos casos las simulaciones se han hecho para los parámetros:

$$\beta = 0.09; \quad \omega_{excit} \text{ variable}; \quad \omega_{md} = 180 \text{ rad/s}$$

La principal diferencia se encuentra en el régimen de frecuencias para el que, en el anterior caso, existía un desplazamiento de frecuencias naturales, así como un aumento de las amplitudes, mientras que en el segundo caso esto no ocurre. La diferencia es que ahora la posición del mass damper es $r_7 = r_5 + S_7$, lo que cambia también su velocidad expresada en el vector de coordenadas, variando ambas energías del sistema, cinemática y potencial, afectando a las respectivas matrices de masa y rigidez y, por tanto, a las frecuencias naturales del sistema. Por tanto, en este aspecto, resulta más conveniente colocar el absorbedor en el basculante, pues no se observan esos aumentos en las amplitudes a bajas frecuencias, pero, como se ha dicho anteriormente, es raro que se trabaje en ese régimen. Quedaría, por tanto, comparar los comportamientos a medias o altas frecuencias, cuyas gráficas aparecen ampliadas a partir de la figura 7.25.

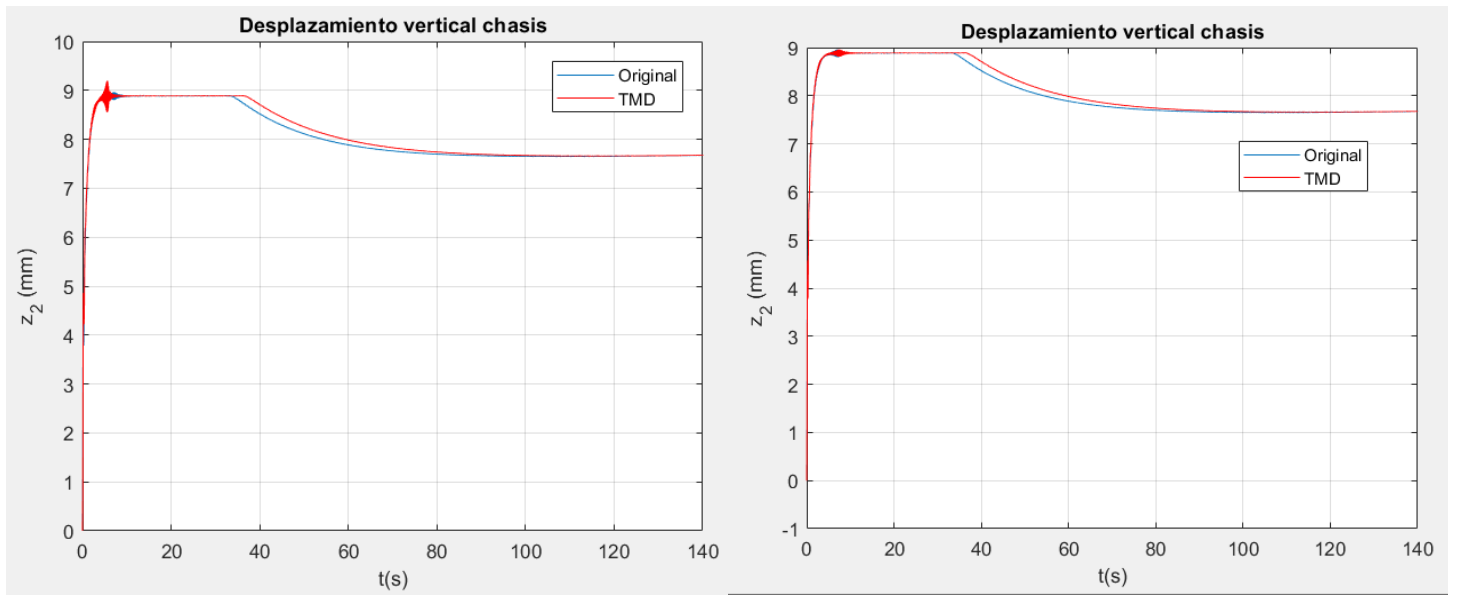


Figura 7.22.- Comparación del desplazamiento vertical del chasis con mass damper en el basculante

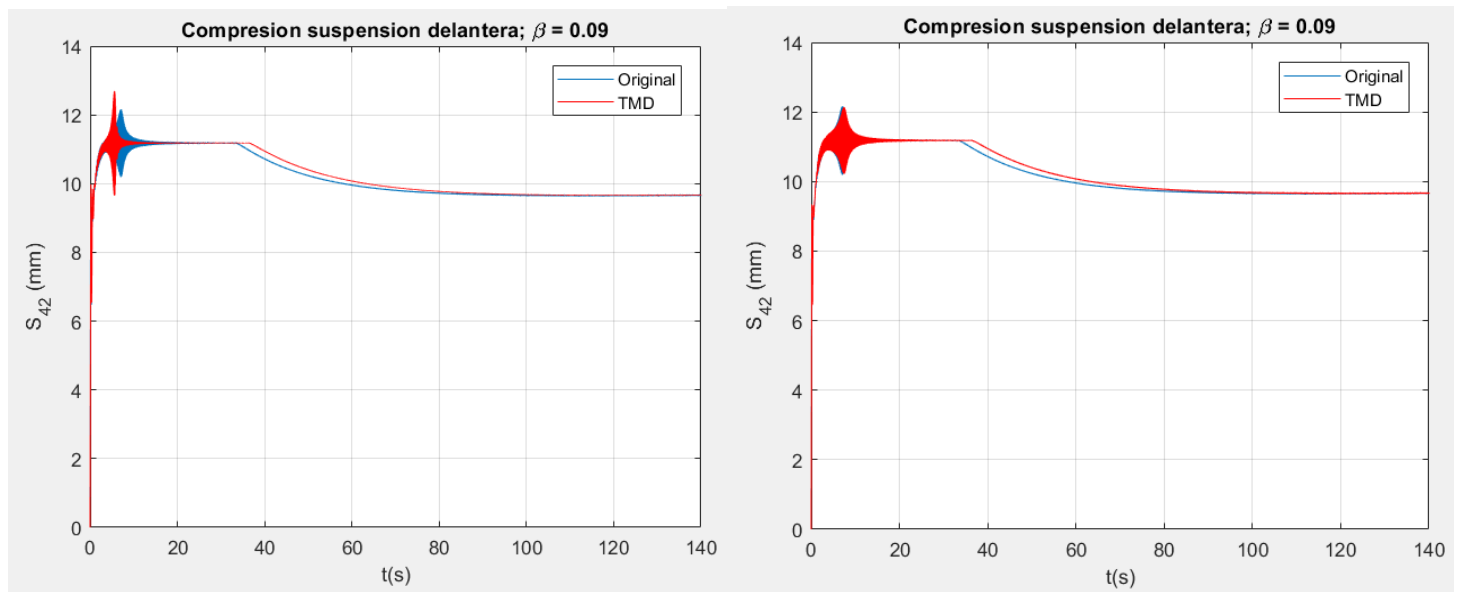


Figura 7.23.- Comparación del desplazamiento de la suspensión delantera con mass damper en el basculante

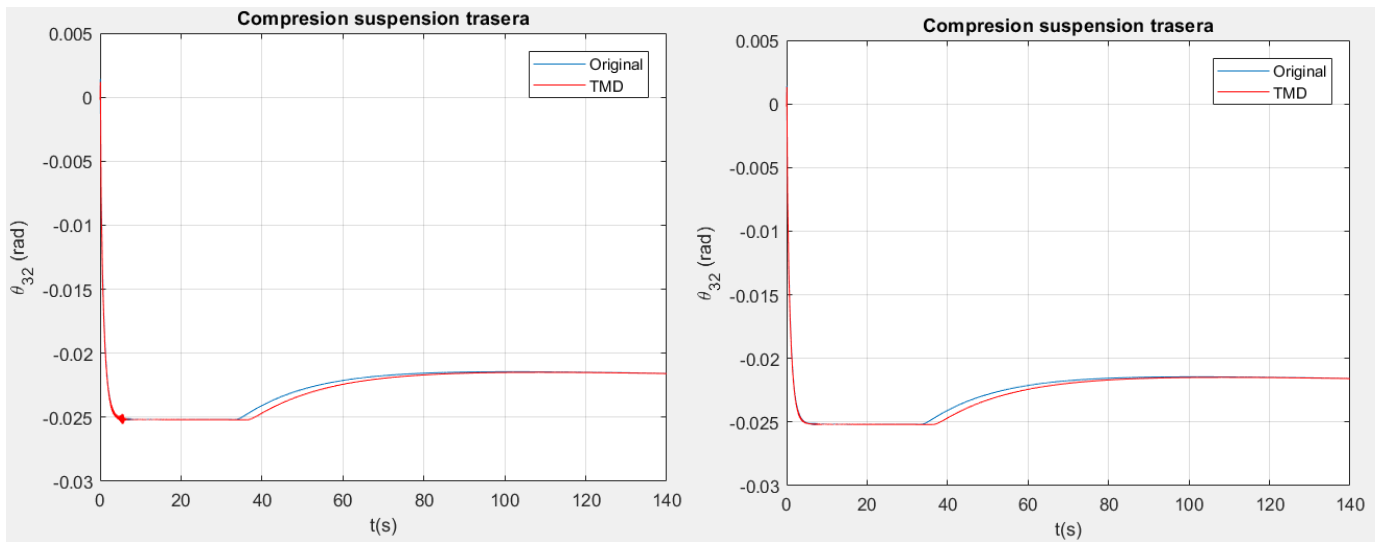


Figura 7.24.- Comparación del desplazamiento de la suspensión trasera con mass damper en el basculante

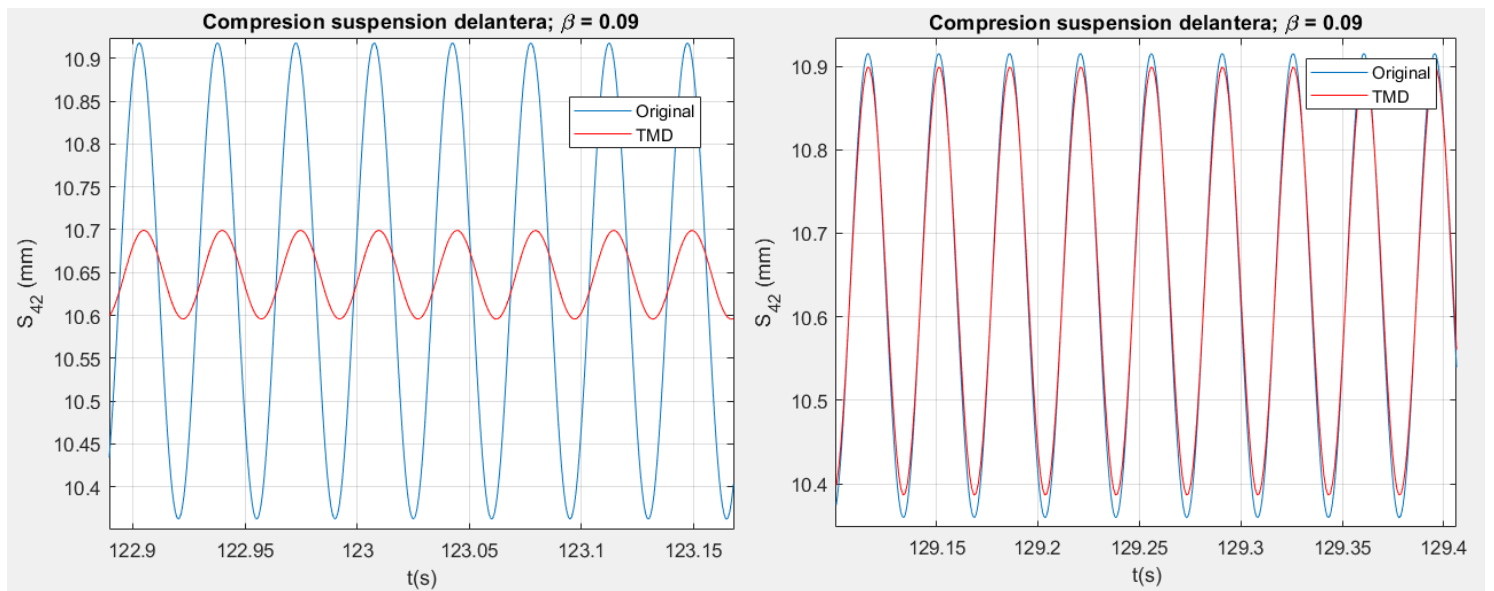


Figura 7.25.- Ampliación de la comparación del desplazamiento de la suspensión delantera con mass damper en el basculante

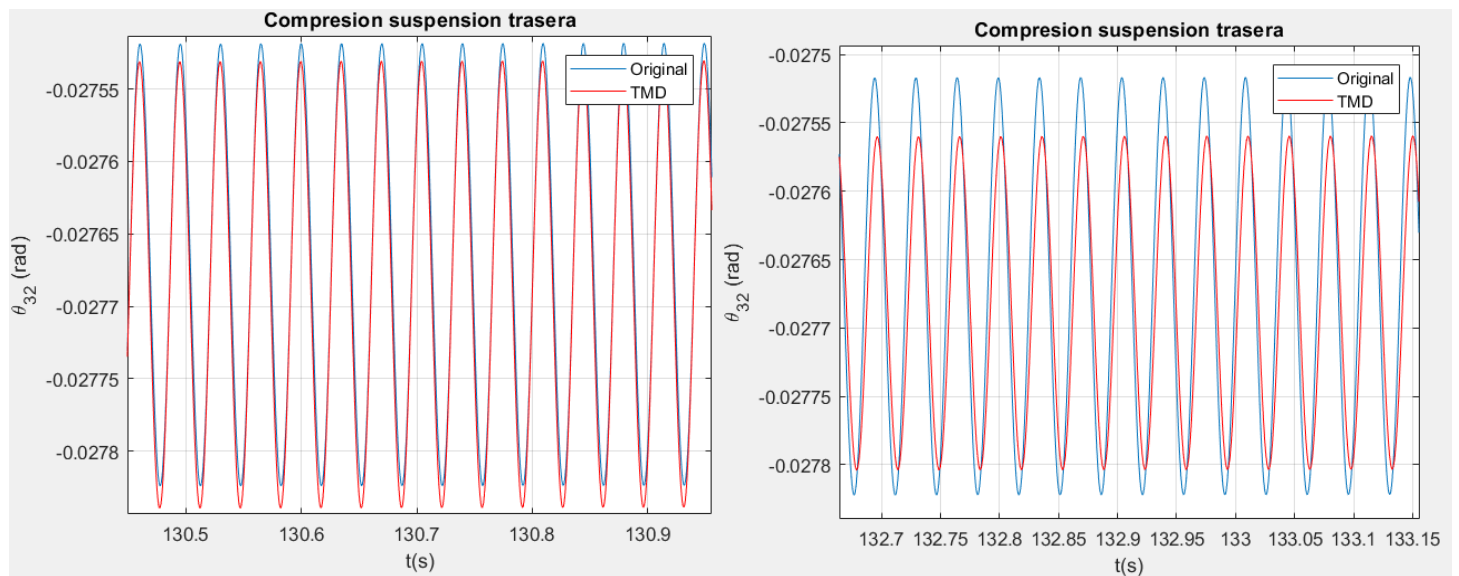


Figura 7.26.- Comparación del desplazamiento de la suspensión trasera con mass damper en el basculante

En ambos casos, se obtiene una mayor eficacia en la suspensión donde se coloca, como es lógico. La diferencia es que, en el primer caso, se obtiene una mayor atenuación relativa de las amplitudes en la suspensión trasera que en el segundo caso en la delantera. Es decir, que en el caso en el que el mass damper colocado en la suspensión delantera, las vibraciones se ven mas atenuadas que las de la suspensión delantera cuando éste se coloca en el basculante (10% frente a 3%). Por otro lado, la atenuación que crea en la suspensión delantera colocándolo ahí frente a la que crea en la trasera situándolo en el basculante, también resulta más beneficiosa a altas frecuencias (80.77% frente a 25%).

En resumen, resulta aparentemente más beneficioso, por lo general, situar el mass damper en la suspensión delantera, pues ofrece resultados mejores y más completos en cuanto a la atenuación que ofrece en el resto de grados de libertad que los que se consiguen colocándolo en el basculante bajo las condiciones estudiadas y parámetros elegidos.

Capítulo 8.- Conclusiones

La conclusión, basándose en las simulaciones realizadas dentro del marco teórico definido al inicio del proyecto, es que la implementación de un mass damper en una moto de competición puede traer beneficios al comportamiento de la misma en la pista. A esto hay que añadir la sensibilidad de las respuestas ante los parámetros del absorbedor, pues se ha demostrado que el mayor beneficio se obtiene cuando se sintoniza este dispositivo con la frecuencia de excitación y se aumenta su masa en relación a la masa total. Hay que tener en cuenta que, en la competición, aunque aparentemente aumentar esta masa tenga resultados positivos, es algo perjudicial por lo que hay que encontrar una solución de compromiso entre este beneficio y la masa que se quiere añadir. Por otro lado, el prototipo no tiene por qué trabajar a su frecuencia natural, si no en un régimen muy amplio de frecuencias (en lo que a excitaciones del terreno se refiere). Pero, a pesar de ello, una de las conclusiones es que elegir una alta frecuencia natural para el absorbedor ofrece buenos resultados a frecuencias más bajas si se elige correctamente su masa, lo cual enfatiza la versatilidad de este dispositivo a pesar de que únicamente puede sintonizarse con una frecuencia.

La siguiente conclusión es que se consiguen atenuar fácilmente las amplitudes de las vibraciones aun para valores pequeños de la masa a añadir, lo cual se va haciendo más costoso conforme aumenta la masa.

También se ha demostrado que, a pesar de no ser muy beneficioso ante excitaciones en rampa a bajas frecuencias, sí que lo es cuando éstas son altas, ya que pasa a comportarse como si las excitaciones fueran senoidales, lo cual vuelve a recalcar lo positivo que resulta esta implementación para frecuencias de excitación altas.

En resumen, para conseguir un correcto funcionamiento del absorbedor hay que sintonizarlo con la frecuencia cuyas amplitudes se quieran atenuar, y cuanto mayor sea la masa, menores serán las amplitudes para esa frecuencia y para las próximas.

Como propuestas de mejora para un futuro estudio, sería interesante observar el comportamiento ante excitaciones aleatorias o comparar los beneficios obtenidos con los que podría ofrecer un *inertor* como el mencionado en la introducción.

Anexo

Esquema del script de Matlab para la resolución de la simulación

Definición de parámetros numéricos y simbólicos

Definición de parámetros globales del sistema y del absorbedor, $m_2, I_c, m_7 \dots$

Definición de distancias entre puntos relevantes del modelo y matrices de giro, $G_2A, G_2B \dots$

Definición de las coordenadas generalizadas, q, \dot{q}, \ddot{q}

Valor de las coordenadas generalizadas en la posición indeformada

Cálculo de posiciones y velocidades

Cálculo de posiciones en función de la posición del centro de gravedad del chasis, r_2

Cálculo de las velocidades de los centros de gravedad de los sólidos en función de las coordenadas generalizadas, $v_i = \left(\frac{\partial r_i}{\partial q} \right) \dot{q}$

Ecuaciones de movimiento del sistema

Obtención de las energías cinética y potencial del sistema:

$$T = T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6$$

$$V = \frac{1}{2} k_{32} (\theta_{32} - \theta_{32,0})^2 + \frac{1}{2} k_{42} (s_{42} - s_{42,0})^2 + \frac{1}{2} k_5 (r_{5z} - R)^2 + \frac{1}{2} k_6 (r_{6z} - R)^2$$

Obtención de la función de disipación de Rayleigh:

$$F_R = \frac{1}{2} c_{32} \dot{\theta}_{32} + \frac{1}{2} c_{42} \dot{s}_{42}$$

Obtención de las fuerzas generalizadas,

$$Q = Q_{grav} \left(= \frac{\partial F_{grav}}{\partial q} \right) + \text{Términos libres (V)}$$

Cálculo de las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial F_R}{\partial \dot{q}} = Q$$

Cálculo de la posición indeformada, *fsolve*

Linealización del sistema y elección de parámetros

$$M(q_{eq}) \ddot{x} = \frac{\partial f}{\partial q} \Big|_{0, q_{eq}} x + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \Big|_{0, q_{eq}} \dot{x}$$

$$M_e \ddot{x} = -K_e x - C_e \dot{x}$$

Gráfica de función de respuesta en frecuencia, $H(w)$, barrido de masa y frecuencia del absorbedor

Resultados de las simulaciones en el tiempo

Definición de los parámetros para las simulaciones, $\omega_{excit}, C_D, N_1, N_2 \dots$

Llamada a la función *aceleración* para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, *ode45*

Función *aceleración*

Toma las velocidades del instante anterior (Nulas inicialmente), calcula la velocidad de giro de la rueda trasera, y, con ella, la velocidad de giro del motor

Define el par motor en función de la velocidad de giro de este con la curva del par motor real

Calcula las fuerzas generalizadas en función de las posiciones y velocidades, fuerza aerodinámica, excitación del terreno...

Resuelve el problema para el instante en función de las nuevas fuerzas y matrices evaluadas en las nuevas posiciones

Lista de comandos clave

Matlabfunction: para evaluar numéricamente matrices simbólicas en función de los valores definidos inicialmente

Eig: Para obtener los autovalores y autovectores (con lo que se obtienen las frecuencias naturales y modos de vibración) del sistema

Fsolve: Para obtener la posición de equilibrio del sistema

Ode45: Para integrar las ecuaciones de movimiento del sistema en el tiempo

Índice de figuras

- 1.1.- Esquema explicativo sobre el funcionamiento de un mass damper
- 1.2.- Mass damper instalado por el equipo Renault de F1 en 2005 y 2006
- 1.3.- Imagen de las “aletas” implantadas por Ducati en el mundial de Moto GP
- 1.4.- Esquema del inerter desarrollado por Ducati para el mundial de Moto GP
- 1.5.- Mass damper implementado en la categoría Moto 2 del mundial
- 2.1.- Motocicleta eléctrica desarrollada por el equipo universitario US Racing
- 2.2.- Esquema del sistema, los sólidos y los grados de libertad definidos
- 2.3.- Modelo en Catia del prototipo
- 2.4.- Esquema del modelo con puntos auxiliares A y B
- 3.1.- Esquema de un sistema mecánico con un mass damper
- 3.2.- Esquema del sistema de un grado de libertad
- 3.3.- Respuesta en régimen permanente del sistema de un grado de libertad al excitarlo a la mitad de su frecuencia natural
- 3.4.- Amplitud de la respuesta del sistema de un grado de libertad en función de la frecuencia a la que se excita
- 3.5.- Sistema de un grado de libertad con un mass damper acoplado
- 3.6.- Primera comparación de respuestas en régimen permanente con y sin mass damper
- 3.7.- Efecto de la frecuencia natural del absorbedor
- 3.8.- Efecto de la masa del absorbedor
- 3.9.- Aplicación de las conclusiones obtenidas. Eliminación de la vibración del sistema
- 4.1.- Esquema y grados de libertad del modelo con mass damper acoplado
- 5.1.- Escenario de cargas del prototipo
- 5.2.- Imagen del motor Engiro MS1920 y de su curva de par motor
- 5.3.- Adaptación de la curva del torque del motor empleada para las simulaciones
- 5.4.- Resultado de la prueba de aceleración
- 5.5.- Representación del paso de una moto por asfalto
- 5.6.- Representación del asfalto mediante una onda senoidal
- 5.7.- Situación de paso por encima de un piano a baja velocidad

- 5.8.- Paso por encima de un piano a velocidad moderada o alta.
- 5.9.- Imagen de una onda triangular que representa el perfil del piano
- 6.1.- Efecto de la frecuencia del absorbedor sobre la respuesta en frecuencia
- 6.2.- Efecto de la masa del absorbedor sobre la función de respuesta en frecuencia del sistema
- 7.1.- Desplazamiento vertical del chasis para $\omega_{md}=180$ rad/s; $\beta = 0.01$; $\omega_{excit}=30$ rad/s
- 7.2.- Desplazamiento de la suspensión delantera para $\omega_{md} = 180$ rad/s; $\beta = 0.01$; $\omega_{excit}=30$ rad/s
- 7.3.- Desplazamiento de la suspensión trasera para $\omega_{md}=180$ rad/s; $\beta = 0.01$; $\omega_{excit}=30$ rad/s
- 7.4.- Régimen transitorio. Situación: $\beta = 0.01$; $\omega_{excit} = 30$ rad/s; $\omega_{md} = 180$ rad/s
- 7.5.- Régimen permanente. Situación: $\beta = 0.01$; $\omega_{excit} = 30$ rad/s; $\omega_{md} = 180$ rad/s
- 7.6.- Régimen transitorio. Situación: $\beta = 0.01$; $\omega_{excit} = 180$ rad/s; $\omega_{md} = 180$ rad/s
- 7.7.- Régimen permanente. Situación: $\beta = 0.01$; $\omega_{excit} = 180$ rad/s; $\omega_{md} = 180$ rad/s
- 7.8.- Régimen transitorio. Situación: $\beta = 0.09$; $\omega_{excit} = 180$ rad/s; $\omega_{md} = 180$ rad/s
- 7.9.- Régimen permanente. Situación: $\beta = 0.09$; $\omega_{excit} = 180$ rad/s; $\omega_{md} = 180$ rad/s
- 7.10.- Régimen permanente. Situación: $\beta = 0.09$; $\omega_{excit} = 147.2$ rad/s; $\omega_{md} = 147.2$ rad/s
- 7.11.- Respuesta ante ω_{excit} variable . Situación: $\beta = 0.09$; $\omega_{md} = 180$ rad/s
- 7.12.- Ampliación de la ventana temporal donde se muestra el desplazamiento de las frecuencias naturales del sistema
- 7.13.- Ampliación de la ventana temporal donde el par es constante y máximo
- 7.14.- Ampliación de la ventana temporal donde la velocidad es constante y máxima
- 7.14.- Desplazamiento de la suspensión delantera ante una excitación en rampa. $\beta = 0.01$; $\omega=3$ rad/s; $\omega_{md} = 3$ rad/s
- 7.15.- Ampliación de la figura 7.14
- 7.16.- Desplazamiento de la suspensión delantera ante una excitación en rampa. $\beta = 0.09$; $\omega=3$ rad/s; $\omega_{md} = 3$ rad/s
- 7.17.- Ampliación de la figura 7.16
- 7.18.- Desplazamiento de la suspensión delantera ante una excitación en rampa. $\beta = 0.09$; $\omega=3$ rad/s; $\omega_{md} = 3$ rad/s
- 7.19.- Desplazamiento de la suspensión delantera ante una excitación en rampa. $\beta = 0.09$; $\omega=30$ rad/s; $\omega_{md} = 30$ rad/s
- 7.20.- Desplazamiento de la suspensión delantera ante una excitación en rampa. $\beta = 0.09$; $\omega=180$ rad/s; $\omega_{md} = 180$ rad/s
- 7.21.- Moto del mundial de Moto2 con mass damper en el basculante
- 7.22.- Comparación del desplazamiento vertical del chasis con mass damper en el basculante

- 7.23.- Comparación del desplazamiento de la suspensión delantera con mass damper en el basculante
- 7.24.- Comparación del desplazamiento de la suspensión trasera con mass damper en el basculante
- 7.25.- Ampliación de la comparación del desplazamiento de la suspensión delantera con mass damper en el basculante
- 7.26.- Comparación del desplazamiento de la suspensión trasera con mass damper en el basculante

Índice de tablas

Tabla 2.1.- Parámetros del sistema

Tabla 5.1.- Coeficientes empleados en las simulaciones

Tabla 6.1.- Conclusiones sobre los efectos de los parámetros del mass damper

Tabla 7.1.- Resumen de atenuaciones en función de los parámetros del absorbedor

Tabla 7.2.- Comparación de amplitudes esperadas en función cuando ω_{excit} es variable .
Situación: $\beta = 0.09$; $\omega_{md} = 180$ rad/s

Bibliografía

- [1] Artículo de Alfonso Somoza sobre los inerter de Ducati – Todocircuito (7/2/2017):
<https://www.todocircuito.com/noticias/13727-ducatti-gp17-jdamper-inerter-caja.html>
- [2] Optimisation of off-road motorcycle suspension, Felipe Vasquez Stuardo, University of Southampton
- [3] Vibration problems in engineering, 5th edition – P. 242
- [4] Artículo de *Morrillu* – Soy Motero (8/2/2020) : <https://www.soymotero.net/ducatti-motogp-y-su-caja-misteriosa-antichattering-o-masa-variable-22151>

